240

Produit de convolution. Transformation de Fourier. Applications.

Cadre : On se place sur $\mathbb{R}^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$ en général. On énoncera aussi certains résultats sur $\mathbb{R}$ uniquement.

Notations : $- \tau_a f : x \mapsto f(x-a)$ pour $a \in \mathbb{R}^d$
- $f_\sigma(x) = f(-x)$
- Multiindice : $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|$.

I) Transformée de Fourier et produit de convolution de fonctions

[BONY] [G-W] [RUD] [Z]

1) Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition-Proposition 1 : On appelle transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la fonction, notée $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$, définie par : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$
- On définit de même $\overline{\mathcal{F}}f$ par : $\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$.
- $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en l'infini et vérifie $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

Exemple 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. On pose $f(x) = e^{-z|x|^2}$.
Alors $\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}$

Proposition 3 : - Soient $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \hat{g}(t)\,dt$.
- Si $x^\alpha f \in L^1$ avec $|\alpha| \leq k$, alors $\hat{f} \in C^k$ et $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}$.
- Si $f \in C^k$ avec $\partial^\beta f \in L^1$, $\forall |\beta| \leq k$, alors $\forall |\beta| \leq k$, $x^\beta \mathcal{F}f \in L^\infty$ et $\mathcal{F}(\partial^\beta f) = i^{|\beta|} x^\beta \hat{f}$
- $\mathcal{F}(f)_\sigma = \mathcal{F}(f_\sigma)$
- $\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-2i\pi a\xi} \mathcal{F}f$

Remarque 4 : La transformée de Fourier échange dérivation et multiplication.

Exemples 5 : - Si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$, $f(x) = \mathrm{signe}(x) e^{-z|x|}$, alors $\hat{f}(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{z^2 + 4\pi^2\xi^2}$
- Calcul via une équation différentielle, on reprend f de l'exemple 2. f vérifie : $y' + 2zx\,y = 0$. Donc, en passant à $\mathcal{F}$ dans cette équation, on retrouve le résultat.

Théorème 6 (Inversion de Fourier) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f).$$

Application aux calculs de transformées de Fourier 7 :
- Si $f(x) = \left[\frac{\pi}{z}\right]^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4z}}$, [illegible] $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-z|x|^2}$
- Si $f(x) = \mathrm{signe}(x) e^{-z|x|}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{z^2 + 4\pi^2\xi^2} \notin L^1(\mathbb{R})$ donc on ne peut appliquer la transformation inverse.

Définition 8 : Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle convolution de f et g et on note $f * g$ la fonction définie par : $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) g(t)\,dt$.

Exemples 9 : - $f = g = \mathbb{1}_{[a,b]}$: $f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2a \\ x - 2a & \text{si } 2a \leq x \leq a+b \\ 2b - x & \text{si } a+b \leq x \leq 2b \\ 0 & \text{si } x \geq 2b \end{cases}$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g = \frac{\mathbb{1}_{[-h,h]}}{2h}$ où $h > 0$ fixé : $f * g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$.

Proposition 10 : - Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La convolution est un opérateur bilinéaire continu de $L^1 \times L^1$ dans L^1 et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
- Si $f \in L^1_{loc}$ et $g \in L^\infty$, alors si $\mathrm{supp}(g)$ est borné, alors $f * g$ existe pp et est dans L^1_{loc}.

Définition 11 : On appelle suite régularisante une suite $(\rho_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x)\,dx = 1$.
- $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Proposition 12 : - Si $f \in L^1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$
- Soit $f \in L^1$ et soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante, alors $\lim_{n \to +\infty} \|f - f * \rho_n\|_1 = 0$ de plus $\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 13 : (Lien entre transformée de Fourier et convolution) : Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Alors : $\rightarrow \widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}\,\hat{g}(\xi)$
$\rightarrow$ Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans L^1, alors $\widehat{fg}(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi)$.

La transformée de Fourier échange convolution et produit usuel.

2) Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 14. (Espace de Schwartz). On appelle espace de Schwartz l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \ \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \ |x^\alpha \partial^\beta f| < C_{\alpha,\beta}.$$

Exemples 15.
- $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- $e^{-z|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ où $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Proposition 16.
- Muni des semi-normes $p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace complet métrisable.
- $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par un polynôme et par dérivation.
- $\forall p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

On peut donc appliquer $\mathcal{F}$ et $*$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 17.
- L'espace $\mathcal{S}$ est stable par passage à la transformée de Fourier.
- $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$. De plus $\mathcal{F}^{-1} f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} f_\sigma$.
- L'espace $\mathcal{S}$ est stable par produit de convolution.
- $*$ est un opérateur continu bilinéaire de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Proposition 18. Propriétés de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

1) $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \hat{g}(t) dt$
2) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$
3) $\widehat{fg} = \frac{\hat{f} * \hat{g}}{(2\pi)^d}$
4) $\widehat{\partial_j f} = i\xi_j \hat{f}$
5) $\widehat{x_j f} = i \partial_j \hat{f}$

Proposition 19 : Formule de Poisson [DEV 1] Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

Application : $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{s}}$ pour $s > 0$

3) Dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

D'après ce qui précède $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \mapsto \hat{f}$ est continue.

Proposition 20 : On a $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to L^2$ est une isométrie. On peut la prolonger de manière unique en une application continue $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$. De plus, si $f \in L^1 \cap L^2$, cette application coïncide avec la transformée de Fourier L^1 (d'où les notations).

Corollaire 21 : (Plancherel) Si $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}^d)^2$, alors :
- $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$
- $\int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \, \overline{\mathcal{F}g}$.

Application 22 : Théorème d'échantillonnage de Shannon [DEV 2]

On pose $BL^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$, alors
- BL^2 est un espace de Hilbert
- Tout $f \in BL^2$ possède un représentant dans $C(\mathbb{R})$ (est égal pp à un $u \in C_0(\mathbb{R})$)
- $(\mathrm{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2
- Pour $f \in BL^2$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \,\mathrm{sinc}(x-k)$. La série converge uniformément et dans L^2.

II) Transformée de Fourier et produit de convolution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 23 : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire l'ensemble des distributions f telles que : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}, |\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq l}} \sup_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

Théorème-définition 24 : Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de T notée $\mathcal{F}T$ ou $\hat{T}$ est la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \text{et } \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'.$$

Exemple 25 :
- $\mathcal{F}\delta_0 = 1$
- $\mathcal{F}1 = (2\pi)^n \delta_0$

Proposition 26 : • La transformée de Fourier est une application linéaire bijective et bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

• Pour $T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(\partial_j T) = i\,\xi_j \mathcal{F}T$

$$\mathcal{F}(x_j T) = i\,\partial_j \mathcal{F}T$$

Exemple 27 : $\mathcal{F}(e^{i\lambda|x|^2}) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i\,\mathrm{sgn}(\lambda)\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{-i\frac{|\xi|^2}{4\lambda}}$

Théorème-définition 28 : (Convolution de deux distributions)
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $T*S$ forme linéaire sur $\mathcal{D}$ par $\langle T*S, \varphi\rangle = \langle T_y \otimes S_z, \varphi(y+z)\rangle$ est une distribution. C'est la convolution de S et T.

Proposition 29 : Si $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$, alors $T*S \in \mathcal{S}'$ et $\mathcal{F}(T*S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$.

Application 30 : Soient $A \in \mathcal{E}'$ et $f \in \mathcal{S}'$. On considère l'équation $A*u = f$ sur $\mathcal{D}'$. Les solutions sur $\mathcal{S}'$ vérifient $\hat{A}\hat{u} = \hat{f}$ et cette équation est immédiate à résoudre lorsque $\hat{A}$ ne s'annule pas. On ne sait rien sur les solutions de $\mathcal{D}' \setminus \mathcal{S}'$.

Exemple 31 : Équation de Laplace : $\Delta u = 0$ sur $\mathcal{S}'$. On a $-|\xi|^2\hat{u} = 0$ donc $\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset \{0\}$; u est une somme de dérivées de la masse de Dirac.

Définition 32 : (Transformée de Fourier partielle) Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$, on définit la transformée de Fourier partielle en x de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ par :

$$\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d,\ \widehat{\mathcal{F}}f(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x)\,dx$$

Remarque 33 : Toutes les propriétés de la transformée de Fourier peuvent s'adapter à la transformée de Fourier partielle.
• Les propriétés de régularité de f en tant que fonction de $t \in \mathbb{R}^p$ se conservent par passage à la transformée de Fourier.

Application 34 : (Équation de Schrödinger) Pour $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ du problème $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1}) \\ u_0 = g \end{cases}$

u est donnée par : $u_t = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-it|\xi|^2}}{2\pi}\hat{g}\right)$. [DEV POSSIBLE]

III Applications [Z] [BL]

1) Résolution de l'équation de la chaleur [DEV POSSIBLE]

On s'intéresse au problème suivant : soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Soit $g \in L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \Omega) \\ u_0 = g \\ u_t \in H_0^1(\Omega)\ \forall t > 0 \end{cases}$$

Si (e_n) désigne une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres du laplacien associée aux (λ_n) alors l'unique solution de ce problème est donnée par : $u_t = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle g, e_n\rangle e_n$

2) Transformée de Fourier en probabilités.

Définition 35 : Soit X vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X la fonction φ^X définie par : $\varphi^X(t) = \mathbb{E}(e^{it\cdot X}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\cdot x}\,dP_X$.

Remarque 36 : Il s'agit de la transformée de Fourier de X.

Proposition 37 : Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires tels que $\varphi^X = \varphi^Y$, alors X et Y ont même loi. La fonction caractéristique définit la loi.

Exemples 38 :
• Si $X = a$ p.s., alors $\varphi^X(t) = e^{ita}$
• Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\varphi^X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
• Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$\varphi^X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(e^{it}-1)).$$

Application 39 : Obtention de la densité à partir de la fonction caractéristique : Si φ^X est la fonction caractéristique de X est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors la densité f^X est définie et bornée et donnée par : $f^X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot x}\varphi^X(t)\,dt$.
C'est la formule d'inversion de Fourier dans L^1.

Références : [Z] = Zuily, [BON] = Bony - Cours d'analyse, [G-W] = Gasquet - Witomski : Analyse de Fourier et applications.
[RUD] = Rudin, [BL] = Barbe Ledoux : Probabilité