240

Produit de convolution. Transformation de Fourier. Applications.

Tous les théorèmes sont énoncés dans $\mathbb{R}$, on peut les généraliser à $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

I. Convolution

1) Définitions et exemples

[OA] p113 **Def 1** : Le produit de convolution de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ est s'il est bien défini la fonction $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

[OA] p113 **Rmq 2** : Le but est de régulariser des fonctions f en faisant une moyenne pondérée par g des valeurs de f en chaque point.

[OA] p113 **Ex 3** : $(f * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)dt$

[OA] p114 **Rmq 4** : On peut aussi définir sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une notion de convolution : pour f et g 2π-périodiques, on pose $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$

2) Propriétés de la convolution

[OA] p114 **Prop 5** : Si $(f*g)(x)$ est bien défini, on a $(f*g)(x) = (g*f)(x)$ ie la convolution est commutative.

[LAA] p245 **C-ex 6** : La convolution n'est pas associative en général :
$f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$, $g = \mathbb{1}_{[-1,0[} - \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $h = 1$
$((f*g)*h)(x) = 1 \neq 0 = f*(g*h)(x)$ (mais c'est vrai dans $L^1(\mathbb{R})$)

[OA] p115 **Prop 7** : Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable donc $(f*g)$ est bien définie pour presque tout x. De plus, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

[OA] p115 **Prop 8** : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $f*g$ est bien défini pour presque tout x, $f*g \in L^p$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

[OA] p116 **Rmq 9** : La convolution dans L^1 n'apporte pas de régularité

[OA] p116 **Prop 10** : Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. La fonction $(f*g)$ est donc bien définie. De plus, elle est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et on a $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ et $\lim_{|x|\to\infty} f*g(x) = 0$

[LAA] p230 **Def 11** . (support). Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ouvert et f définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille des ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$ tel que $\omega_i \subset \Omega$ et $\forall i \in I$, $f=0$ pp sur ω_i. On pose $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ et on a $f=0$ pp sur ω.
Par définition, $\text{supp}(f) = \Omega \setminus \omega$

[LAA] p230 **Ex 12** : $\text{Supp}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) = \emptyset$

[LAA] p230 **Prop 13** . Si $f*g$ est bien défini alors $\text{supp}(f*g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$

Ex 14 : Si f et g sont tous deux à supports compacts alors $f*g$ est à support compact. [LAA] p230

Ex 15 : Si $f = \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ alors $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} \subset \overline{A+B}$ [LAA] p249

3) Convolution et régularisation

Thm 16 1) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que g et g' sont bornées, [LAA] p116
Alors $f*g$ est dérivable et $(f*g)' = f*g'$.
2) Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que $g' \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $f*g$ est dérivable et $(f*g)' = f*g'$

Ex 17 : $g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact [OA] p117
La convolution par g régularise les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$

Ex 18 : $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$ pour $t>0$. La convolution par G_t régularise les fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$. (voir FIGURE 1) [OA] p117

Prop 19 : Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $(f*g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}*g$ [LAA] p231
En particulier, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Def 20 : On dit qu'une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables est une identité approchée si : [OA] p119
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n(t) \geq 0$ pp
2) $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
3) $\forall \eta > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\eta} \rho_n(t)dt = 0$

Ex 21 : On peut prendre $\rho_n = G_{1/n^2}$ pour avoir une identité approchée $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide ou $\rho_n(t) = ng(nt)$ pour avoir une identité approchée $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. [OA] p119

Thm 22 : (Approximation). Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une identité approchée. [OA] p119
1) Si f est mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ alors $(\rho_n * f)(x) \to f(x)$ en tout point x où f est continue
2) Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ alors $(\rho_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact. Si de plus, f est uniformément continue, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$
3) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ (avec $1 \leq p < \infty$) alors $(f*\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

[OA] p121 Appli 23 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

II Transformation de Fourier

1) Dans $L^1(\mathbb{R})$

[RUD] p219 Def 24 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$$

[LAA] p253 Ex 25 : Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ alors $\hat{f}(t) = \frac{2 \sin(xa)}{\sqrt{2\pi}\, x}$

[OA] p115 Lem 26 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (Riemann-Lebesgue)

[RUD] p220 Prop 27 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$
a) Si $g(x) = f(x) e^{i\alpha x}$ alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
b) Si $g(x) = f(x-\alpha)$ alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t) e^{-i\alpha t}$
c) Si $g \in L^1$ et $h = f * g$ alors $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$
d) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$
e) Si $\lambda > 0$ et $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ alors $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$
f) Si $g(x) = -ix f(x)$ et si $g \in L^1$, $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$

[LAA] p260 Appli 28 Il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans L^1.
ie $\nexists g \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $g * f = f$

[LAA] p260 Appli 29 : Si $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $f = 0$ pp

[RUD] p224 Thm 30 : (Inversion de Fourier) . Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et si
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$ alors $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $g(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f = g$ p.p.

[RUD] p225 Thm 31 (Injectivité de la transformation de Fourier). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = 0$ alors $f \equiv 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

[OA] p110 Def 32 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$.

[OA] p110 Def 33 : On note $L^2(I, \rho)$ l'espace muni du produit scalaire
$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \bar{g}(x) \rho(x) dx$.

[OA] p110 Prop 34 : Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires et 2 à 2 orthogonaux tq $\deg(P_n) = n$.

[OA] p140 Thm 35 : Si $\exists a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$ alors les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ DEV

2) Dans $L^2(\mathbb{R})$

Thm 36 : (Plancherel) À chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer une fonction $\hat{f} \in L^2$ telle que : [RUD] p225
1) Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f
2) $\forall f \in L^2$, on a $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
3) $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2 sur L^2
4) Si $\varphi_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx$ et $\psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{-ixt} dt$, alors
$\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \hat{f}\|_{L^2} = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_{L^2} = 0$

Rmq 37 : La densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 assure de façon unique la correspondance entre f et $\hat{f}$ dans L^2. [RUD] p226

Coro 38 : Si $f \in L^2$ et $\hat{f} \in L^1$, on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$ p.p. [RUD] p227

Ex 39 . $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$ [LAA] p 286

3) Dans $S(\mathbb{R})$

Def 40 : $S(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty \}$ [ZUI] p107

Ex 41 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ et $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$ [ZUI] p107

Rmq 42 : $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ donc la transformée de Fourier est bien définie [ZUI] p108

Prop 43 : 1) Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, les applications $u \mapsto x^\alpha u$ et $u \mapsto u^{(\alpha)}$ sont continues de S dans S. [ZUI] p108 et 111
2) le produit de deux éléments de S est dans S.
3) Si $u, v \in S$ alors $u * v \in S$ et $\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$

Thm 44 . (Isomorphisme de Fourier) : [ZUI] p109
La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$.
Si on pose pour $v \in S(\mathbb{R})$, $\overline{\mathcal{F}} v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} v(t) e^{ixt} dt$ alors
$\mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} = id_{S(\mathbb{R})}$

4) Dans $S'(\mathbb{R})$

Def 45 . On définit $S'(\mathbb{R})$ comme l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ muni des semi-normes [ZUI] p112
$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|$ pour $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

[ZUI] p114 **Thm/Def 46** : Si $T \in S'(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de T, notée $\hat{T}$, la forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$:

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

De plus, $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$.

[ZUI] p115 **Ex 47** : $\widehat{\delta_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$

[ZUI] p25 **Def 48** : Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, le support de T, noté supp(T) est le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

[ZUI] p120 **Thm 49** : Si $T \in S'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (= distributions à support compact), on a $T * S \in S'(\mathbb{R})$ et $\widehat{T * S} = \hat{T}\hat{S}$

[ZUI] p120 **Thm 50** : Soit $T \in S'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in S(\mathbb{R})$ alors $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap S'(\mathbb{R})$ et $\widehat{T * \varphi} = \hat{\varphi}\hat{T}$

III_ Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on prendra la normalisation $\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} F(t)dt$ par $F \in L^1(\mathbb{R})$.

DEV

[GOU] p273 **Thm 51** : Soit $f \in S(\mathbb{R})$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$.

[WIL] p149 **Appli 52** : Dans $S'(\mathbb{R})$, on a $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}$

2) Applications aux EDP

[LAA] p264 *** Equation de la chaleur**

On considère une tige homogène de longueur infinie. On se donne à l'instant $t=0$, la répartition $u_0(x) = u(0,x)$ de la température en chaque point de la tige ($x \in \mathbb{R}$).

On cherche à déterminer son évolution $u(t,x)$ sachant qu'elle vérifie l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & ,(t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution est $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy$.

*** Equation des ondes** [LAA] p267

On considère l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & , (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $g' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$,

$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$ est solution.

3) Application en probabilité

[BL] p61 **Def 53** : Soit X une v.a réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction caractéristique de X, notée φ_X, la fonction définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

[BL] p62 **Thm 54** : La fonction caractéristique caractérise la loi d'une v.a.

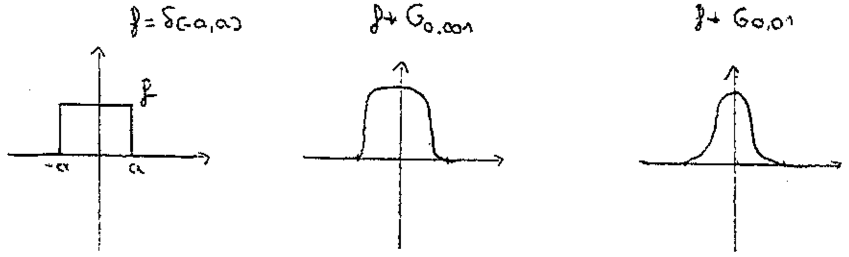
[BL] p63 **Ex 55** : Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}$

[BL] p85 **Prop 56** : Soient X et Y deux v.a réelles, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La loi de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$

[BL] p89 **Ex 57** : $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2) * \mathcal{N}(0,\sigma_2^2) = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

FIGURE 1 :



Références

[OA] : Objectif Agrégation , Beck, Malick, Peyré , 2e édition

[LAA] : El Haj Laamri , Mesures, intégration , convolution et transformée de Fourier des fonctions

[RUD] : Rudin , Analyse réelle et complexe

[ZUI] : Zuily , Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles

[GOU] : Gourdon Analyse
[WIL] : Willem, Analyse harmonique réelle } pour formule sommatoire de Poisson

[BL] : Barbe, Ledoux , Probabilités

Densité des polynômes orthogonaux

Maylis Varvenne & Caroline Robet

Théorème. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* ρ *une fonction poids.*
On suppose qu'il existe $a > 0$ *tel que*

$$\int_{\mathrm{I}} e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty \tag{1}$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ *forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathrm{I},\rho)$.

Rappels :

- ***fonction poids :*** $\rho\ :\ \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ mesurable et strictement positive et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathrm{I}} |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
- ***produit scalaire :*** $\langle f, g\rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration.

- **Soit $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$, montrons que $\varphi = f\rho\mathbb{1}_{\mathrm{I}}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$:**

On remarque que $\forall t \geqslant 0$, $t \leqslant \frac{(1+t^2)}{2}$, donc pour tout x dans I, on a :

$$|f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$$

Or, ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on en déduit donc que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
On peut alors considérer la transformée de Fourier de φ :

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\quad \hat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\mathrm{d}x$$

- **Montrons que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$:**

On pose $g(z,x) = e^{-izx}f(x)\rho(x)$.
$\forall z \in B_a$, $\forall x \in \mathrm{I}$, on a :

$$|g(z,x)| = \underbrace{|e^{-izx}|}_{\leqslant e^{a|x|/2}}|f(x)|\rho(x) \leqslant e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_{\mathrm{I}} e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty \tag{2}$$

donc

$$\int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\mathrm{d}x < +\infty$$

On définit alors la fonction F par :

$$\forall z \in B_a,\quad F(z) = \int_{\mathrm{I}} e^{-izx}f(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{I}} g(z,x)\mathrm{d}x$$

D'après (2), F est bien définie.
Vérifions que F satisfait les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :

- $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour presque tout $x \in \mathrm{I}$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.

- Pour tout z tel que $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant a/2$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x) \quad \in L^1(\mathrm{I}) \quad \text{(d'après (2))}$$

Ainsi, F est holomorphe sur B_a et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in B_a$:

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

On note $g_n(x) = x^n$, on suppose maintenant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$$

- **Montrons que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathrm{I}$ (ie $f = 0$ dans $L^2(\mathrm{I}, \rho)$) et conclusion :**

On a

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho = 0 \quad \text{(par hypothèse)}$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe assure que $F = 0$ sur un voisinage de 0.
D'après le théorème de prolongement analytique, comme B_a est connexe, on en déduit que $F = 0$ sur B_a donc en particulier, $F = 0$ sur $\mathbb{R}$.
D'où $\hat{\varphi} = 0$.
Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'injectivité de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ implique $\varphi = 0$.
Comme $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathrm{I}$.
Ainsi, la famille g_n est totale, les polynômes orthogonaux associés à ρ forment donc une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.

$\square$

Contre-exemple. *Lorsqu'on n'a plus l'hypothèse : il existe $a > 0$ tel que $\int_\mathrm{I} e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.*
On prend $\mathrm{I} =]0, +\infty[$, et la fonction de poids $w(x) = x^{-\ln x}$.

Démonstration.
Soient $f \ : \ x \in \mathrm{I} \mapsto \sin(2\pi \ln(x)) \in \mathbb{R}$ et $g_n(x) = x^n$.
Montrons que $\langle f, g_n \rangle_w = 0$:

$$\langle f, g_n \rangle_w = \int_\mathrm{I} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} \mathrm{d}x$$

On fait un changement de variable : on pose $y = \ln(x)$, $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

$$\begin{aligned} \langle f, g_n \rangle_w &= \int_\mathbb{R} e^{ny} \sin(2\pi y) e^{-y^2} e^y \mathrm{d}y \\ &= \int_\mathbb{R} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \mathrm{d}y \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_\mathbb{R} e^{-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

On pose $t = y - \frac{n+1}{2}$,

$$\begin{aligned} \langle f, g_n \rangle_w &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_\mathbb{R} e^{-t^2} \underbrace{\sin(2\pi t + (n+1)\pi)}_{\sin(2\pi t)\cos((n+1)\pi)} \mathrm{d}t \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} (-1)^n \int_\mathbb{R} e^{-t^2} \sin(2\pi t) \mathrm{d}t \\ \langle f, g_n \rangle_w &= 0 \quad \text{(car } \sin(2\pi t) \text{ est impaire)} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille des g_n n'est pas totale dans $L^2(\mathrm{I}, w)$.
La famille des polynômes orthogonaux associés à w n'est donc pas totale. $\square$

Référence : Beck, Malick, Peyré, *Objectif agrégation*, page 140.

Formule sommatoire de Poisson

Maylis Varvenne & Caroline Robet

Théorème. *Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \sup |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

où $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t$.

Démonstration.

- **Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:**

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe $M > 0$ telle que pour $|x| \geqslant 1$.
Pour tout $K > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-K, K],\ \forall n \in \mathbb{Z} \text{ tq } |n| > K+1, \quad |f(x+n)| &\leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2} \\ \text{donc } \|f(.+n)\|_{\infty, K} &\leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.
En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, on note F sa limite simple.
De même, on montre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Comme $x \mapsto f(x+n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par le théorème de dérivation d'une série de fonctions, on obtient sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$:

$$F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } F'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n).$$

- **1-périodicité de F et conclusion :**

Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

En passant à la limite pour $N \longrightarrow +\infty$, on obtient $F(x+1) = F(x)$.
Ainsi, F est 1-périodique.

Les coefficients de Fourier de F sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t \qquad \text{(on peut intervertir par convergence uniforme)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi nu} \mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u = t+n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi nu} \mathrm{d}u \\ c_n(F) &= \hat{f}(n) \end{aligned}$$

Comme F est $\mathcal{C}^1$ et 1-périodique, elle coïncide avec sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. On en déduit finalement la formule sommatoire de Poisson, à savoir :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

□

Corollaire. *Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $\delta_\mathbb{Z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k = \hat{\delta}_\mathbb{Z}$.*

Démonstration.

- **Montrons que $\delta_\mathbb{Z}$ est bien définie et appartient à $\mathcal{S}'(R)$:**

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, d'après la formule sommatoire de Poisson, on sait que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ existe.
Donc $\langle \delta_\mathbb{Z}, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien défini.

Montrons que $\delta_\mathbb{Z} \in \mathcal{S}'(R)$ (c'est-à-dire que $\delta_\mathbb{Z} \,:\, \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire continue).
La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par les semi-normes $\| \,.\, \|_{n,p} \,:\, \varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n \varphi^{(p)}(x)|$.
Or,

$$\begin{aligned}
|\langle \delta_\mathbb{Z}, \varphi\rangle| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(k)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{k^2}|k^2\varphi(k)| + |\varphi(0)| \\
&\leqslant \underbrace{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{k^2}\right)}_{=2\times\frac{\pi^2}{6}} \|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{0,0} \\
|\langle \delta_\mathbb{Z}, \varphi\rangle| &\leqslant \left(\frac{\pi^2}{3}+1\right) \max\left(\|\varphi\|_{2,0}\ ,\ \|\varphi\|_{0,0}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\delta_\mathbb{Z}$ est bien une distribution tempérée (la linéarité est claire). On peut donc calculer sa transformée de Fourier.

- **Montrons que $\delta_\mathbb{Z} = \hat{\delta}_\mathbb{Z}$:**

  Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\delta}_\mathbb{Z}, \varphi\rangle &= \langle \delta_\mathbb{Z}, \hat{\varphi}\rangle \quad \text{(par définition de la transformée de Fourier dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R})\text{)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi(k)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k) \quad \text{(par la formule sommatoire de Poisson)} \\
\langle \hat{\delta}_\mathbb{Z}, \varphi\rangle &= \langle \delta_\mathbb{Z}, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Références : Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, pages 272-273 (théorème) et Willem, *Analyse harmonique réelle*, page 149 (corollaire).