240 — Produit de convolution. Transformation de Fourier. Applications.

I - Produit de Convolution

A - Définition et premières propriétés.

Déf 1 Pour deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^n$, on appelle, lorsqu'il est bien défini, le produit de convolution de f et g la fonction $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$

Ex 2 : $f*\mathbb{1}_{[0,1]}(x)=\int_{x-1}^{x} f(y)dy$

Prop 3 : Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,+\infty]$, alors $f*g$ existe, est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_p\leq\|f\|_1\|g\|_p$ [BR]

Prop 4 : • Si $f*g$ est bien défini, $f*g(x)=g*f(x)$
• Si $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f*(g+h)=f*g+f*h$

Déf 5 : Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i\subset\Omega$ tels que, pour chaque $i\in I$, $f=0$ pp sur ω_i. On pose $\omega=\bigcup_{i\in I}\omega_i$. Alors $f=0$ pp sur ω. Par définition, $\mathrm{Supp} f=\Omega\setminus\omega$ [BR]

Ex 6 : $\mathrm{Supp}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})=\emptyset$

Prop 7 : Soient $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$
$\mathrm{supp}(f*g)\subset\overline{\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)}$ [BR]

Ex 8 : Si $f=\mathbb{1}_A*\mathbb{1}_B$, alors $\{x\in\mathbb{R}\ \text{tq}\ f(x)\neq 0\}\subset\overline{A+B}$

Prop 9 : Soient $f\in L^1$, $g\in L^p$, $h\in L^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Alors $\int(f*g)h=\int g(\check{f}*h)$ avec $\check{f}(x)=f(-x)$ [BR]

Prop 10 : Soient $f\in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ $(k\in\mathbb{N})$, $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g\in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f*g)=(D^\alpha f)*g$. En particulier, si $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. [BR]

B - Structure de $(L^1(\mathbb{R}^n),+,*)$

[HL] **Prop 11** : Soient $f\in L^p$, $g\in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors $f*g$ existe, $f*g\in L^\infty$ et $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\|g\|_q$

[HL] DEV **Thm 12** (Inégalité de Young) : Soient $f\in L^p$, $g\in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. Alors $f*g\in L^r$ et $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$

Cor 13 : Soient $f\in L^p$, $g\in L^q$, $h\in L^r$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2+\frac{1}{s}$. Alors $f*(g*h)=(f*g)*h\in L^s$ [HL]

Rmq 14 : Dans le cas général, $*$ n'est pas forcément associative.

Cor 15 : $(L^1(\mathbb{R}^n),+,*)$ est un anneau commutatif non unitaire. [HL]

Déf 16 : $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(L^1)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si : [HL]
• $\forall n\in\mathbb{N}$, $\phi_n\geq 0$ et $\int\phi_n(x)dx=1$
• $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|>\varepsilon\}}\phi_n(x)dx=0$

Ex 17 : Si $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\varphi\geq 0$ telle que $\int\varphi=1$, alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi_n(x)=n^d\varphi(nx)$ est une approximation de l'unité.

Prop 18 : Soit $p\in[1,+\infty[$ et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Si $f\in L^p$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f*\phi_n\in L^p$, $\|f*\phi_n\|_p\leq\|f\|_p$ et $\lim_{n\to+\infty}f*\phi_n=f$ dans L^p [HL]

C - Résultats topologiques

Thm 19 : Soit $p\in[1,+\infty[$ et H une partie de L^p. H est relativement compact dans L^p ssi : [HL]
(i) H est borné dans L^p
(ii) $\lim_{R\to+\infty}\int_{\{|x|>R\}}|f(x)|dx=0$ uniformément en $f\in H$
(iii) $\lim_{a\to 0}\tau_a f=f$ dans L^p uniformément en $f\in H$

$(\tau_a f(x)=f(x-a))$

Déf 20 : On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n\geq1}$ de fonctions telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: [BR]
1) $\rho_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
2) $\rho_n\geq 0$
3) $\int\rho_n=1$
4) $\mathrm{supp}\,\rho_n\subset B(0,\frac{1}{n})$

Rmq 21 : $(\rho_n)_{n\geq1}$ est alors une approximation de l'unité.

Prop 22 : Soit $(\rho_n)_{n\geq1}$ une suite régularisante, $f\in C(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho_n*f\to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et $\rho_n*f\in C^\infty$ [BR]

[BR] **Thm 23** : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

[LE] ## II Transformée de Fourier

A - Dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Def 24: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx = \mathcal{F}(f(x))$

Ex 25 : • Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$, $\hat{f}(\omega) = \frac{\sin(2\pi\omega a)}{2i\pi\omega}$

• si $f(x) = e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$, alors $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{\pi^2 \omega^2}{\varepsilon}}$

• x^2 n'a pas de transformée de Fourier.

Prop 26 : 1) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathcal{F}(f(x)) + \beta \mathcal{F}(g(x))$

2) $\mathcal{F}(f(x-c)) = e^{-2i\pi\omega c} \hat{f}(\omega)$

3) $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{2i\pi\omega_0 x} f(x)) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

4) $c \in \mathbb{R}^*$. Alors $\mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right)$

5) Si f est paire/impaire, alors $\hat{f}$ est paire/impaire.

6) $\mathcal{F}(\hat{f}(x)) = \hat{f}(-\omega)$

Prop 27: Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue, bornée, $\hat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega \to \pm\infty]{} 0$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Prop 28 : Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et si $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$, alors $f = g$ pour presque tout point de $\mathbb{R}$.

Prop 29 : • Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Supposons que f est dérivable et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}(f'(x)) = 2i\pi\omega \mathcal{F}(f(x)) = 2i\pi\omega \hat{f}(\omega)$

• Si f est dérivable n fois, avec ses dérivées $\mathcal{L}^1$, alors $\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (2i\pi\omega)^n \hat{f}(\omega)$

Prop 30 : Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{c}{|\omega|^n}$ c = cste.

Prop 31 : • Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si $x \times f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \mathcal{F}(-2i\pi x f(x))$$

• Si $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n}(\omega) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^n f(x))$

Prop 32 : Sous les hypothèses précédentes, on a

$$\left| \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega) \right| \leq (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}} |x^n f(x)| dx$$

Prop 33: Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f*g(x)) = \mathcal{F}(f(x)) \mathcal{F}(g(x))$

Appli 34 : L'anneau $(\mathcal{L}^1, +, *)$ n'a pas d'unité

B - Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Def 35: L'espace de Schwarz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide est défini par :

$$\mathcal{S} = \{ \varphi \in C^\infty, \forall m, n \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to +\infty} |x^m \varphi^{(n)}(x)| = 0 \}$$

Ex 36: $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$

Def 37: $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}$ si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, la suite $(x^m \varphi_k^{(n)}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x^m \varphi^{(n)}(x)$ sur $\mathbb{R}$

Prop 38: $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Prop 39 : $\mathcal{S}$ est stable par transformée de Fourier.

Thm 40 (Isomorphisme de Fourier) : La transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et on a $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega x} d\omega$

Rmq 41 : La formule d'inversion fonctionne lorsque $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Prop 42: Si $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}$, alors $\hat{\varphi}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \hat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}$

Prop 43 (Formule de Plancherel) : Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\hat{\psi}}(\omega) d\omega$$

C - Dans $L^2(\mathbb{R})$

[RUD] **Thm 44** : (Plancherel) À chaque fonction f de L^2, on peut associer une fonction $\hat{f}$ de L^2 telle que :

(i) si $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

(ii) $\forall f \in L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

(iii) L'application $f \longmapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2 dans L^2

(iv) en posant $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$

$\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - f\|_2 = 0$ et $\lim_{A \to +\infty} \|\psi_A - \hat{f}\|_2 = 0$

[LE] **Prop 45** : Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

III Applications

A - Équation de la chaleur

On considère une tige homogène de longueur infinie. On se donne à l'instant $t=0$ la répartition $u_0(x) = u(0,x)$ de la température en chaque point de la tige ($x \in \mathbb{R}$).

On cherche à déterminer son évolution $u(t,x)$ sachant qu'elle vérifie l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution est $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)} dy$

B - Formule sommatoire de Poisson

[GOU] **Thm 46** : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

Ex : Peigne de dirac

C - Application en probabilités

[BL] **Def 47** : Soit X une v.a réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle fonction caractéristique de X, notée φ_X, la fonction définie par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

Thm 48 : La fonction caractéristique caractérise la loi d'une v.a.

ex 49 :
- Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}$

Prop 50 : Soient X et Y deux v.a réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La loi de la somme $X+Y$ est donnée par le produit de convolution $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$

ex 51 : $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(0, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Références

[BR] : Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Brezis

[HL] : Éléments d'analyse fonctionnelle, Hirsch, Lacombe.

[LE] : Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace, Lesfari

[RUD] : Analyse réelle et complexe, Rudin

[GOU] : Analyse, 2e édition, Gourdon

[BL] : Probabilités, Barbe, Ledoux.

dans quel esp. la résoud on ? / ⚠ [illegible] S' au moins pour traiter des EDP ⚠

Bof : [illegible] / En quoi les transformées de Fourier sont une aide aux EDP ?

Développement : Inégalité de Young

Théorème 0.1. *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ et on pose $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Alors :*

1. *f et g sont convolables.*
2. *$f * g \in L^r$*
3. *$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q$*

Démonstration. • On peut supposer $r < \infty$ car le cas $r = \infty$ se résume à l'inégalité de Hölder. Ainsi soit p soit q est fini. De plus, quitte à remplacer f par $|f|$ et g par $|g|$ on peut supposer que $f \geq 0$ et que $g \geq 0$.

• Cas particulier : $p = 1$, $1 \leq q \leqslant \infty$ et donc $r = q$. Par l'inégalité de Hölder relativement à la mesure $f\lambda$ (où λ est la mesure de Lebesgue), on a :

$$\int g(x-y)f(y)dy \leq \left(\int g^q(x-y)f(y)dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int f(y)dy\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

et donc

$$\int \left[\int g(x-y)f(y)dy\right]^q dx \leq \left(\int\int g^q(x-y)f(y)dydx\right) \left(\int f(y)dy\right)^{q-1}$$

Par le théorème de Fubini et par l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, le terme de droite devient :

$$\| g \|_q^q \| f \|_1 \| f \|_1^{q-1}$$

Ainsi f et g sont convolables et $g * f \in L^q$ avec $\| g * f \|_q \leq \| g \|_q \| f \|_1$. Le cas $q = 1$, $1 \leq p \leqslant \infty$ et $r = p$ est identique.

• Cas plus général : $1 \leqslant p; q \leqslant \infty$ Dans ce cas $max(p, q) \leqslant r \leqslant \infty$. On écrit

$$fg = f^{\frac{p}{r}} g^{\frac{q}{r}} f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}}$$

Puis on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants r et $r' = \frac{r}{r-1}$,

$$\int f(x-y)g(y)dy \leq \left(\int f^p(x-y)g^q(y)dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int f^{\frac{r-p}{r-1}}(x-y)g^{\frac{r-q}{r-1}}(y)dy\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

Puis on applique à nouveau l'inégalité de Hölder dans la deuxième intégrale du membre de droite avec pour exposants : $\frac{p(r-1}{r-p}$ et $\frac{q(r-1)}{r-q}$. A noter que ces exposants sont bien conjugués en vertu de la définition de r.

$$\int f^{\frac{r-p}{r-1}}(x-y)g^{\frac{r-q}{r-1}}(y)dy \leq (\int f^p(y)dy)^{\frac{r-p}{p(r-1}} (\int g^p(y)dy)^{\frac{r-q}{q(r-1)}}$$

Finalement on obtient :

$$\int (\int f(x-y)g(y)dy)^r dx \leq \int \int f^p(x-y)g(y)dydx * \parallel f \parallel_p^{r-p} \parallel g \parallel_q^{r-q}$$

On conclut par invariance de la mesure de Lebesgue et par le théorème de Fubini pour obtenir que f et g sont convolables, $f * g \in L^r$ et que $\parallel f * g \parallel_r \leq \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q$.

□

Ce résultat est un peu court pour faire développement c'est pourquoi j'ajoute les deux corollaires suivants.

Corollaire 0.2. *Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. Soit s tel que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2$ Si $f \in Lp$, $g \in L^q$ et $h \in L^r$ alors $f * (g * h)$ et $(f * g) * h$ sont bien définies et sont dans L^s. De plus*

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

La preuve revient à justifier l'application du théorème de Fubini, il suffit pour cela de reprendre les majorations faites dans la preuve précédente.

Corollaire 0.3. $(L^1; +; *)$ *est un anneau commutatif non unitaire.*

Référence : Hirsch-Lacombe page 149-151

Formule d'inversion de Fourier

Arnaud GIRAND

18 août 2012

Référence :
- [QZ07] p. 331–332

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier comme suit :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx$$

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\widehat{f}(t)dt$$

DÉMONSTRATION : Pour $\varepsilon > 0$ on pose $f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2} e^{itx}\widehat{f}(t)$. Alors :
- les f_ε sont L^1 ;
- $f_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{itx}\widehat{f}(t)$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- $|f_\varepsilon| \leq |\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$.

De fait, par théorème de convergence dominée on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} e^{itx}\widehat{f}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\widehat{f}(t)dt \tag{1}$$

Remarquons à présent à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2} f(y)|dydt \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}dt \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy < \infty$$

De fait, par théorème de Fubini–Tonelli on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx-\varepsilon t^2}\widehat{f}(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2} f(y)dydt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2} f(y)|dtdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2} dtdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{(y-x)^2/4\varepsilon}dy \text{ (cf. infra)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x+2\sqrt{\varepsilon}y)dy \text{ via } y \mapsto x+2\sqrt{\varepsilon}y)
\end{aligned}$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée nous indique que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x+2\sqrt{\varepsilon}y)dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dyf(x) = \sqrt{\pi}f(x)$$

D'où le résultat via la relation (1).

Détails supplémentaires :

- Ce développement est trop court en l'état, il sera donc nécessaire de l'allonger le moins artificiellement possible. Le jour de mon oral d'agrégation, j'ai proposé en première partie la démonstration du fait que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pourrait aussi inclure le calcul de l'intégrale de Gauss "généralisée" (cf. infra, ou alors la version avec prolongement analytique). Tous ces "petits" résultats se trouvent dans [QZ07] dans un voisinage de la page 330.
- Il nous reste à justifier le calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt$. Posons :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt$$

Alors comme la fonction $(x,t) \mapsto e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}$ est C^1 selon sa première variable, intégrable selon sa deuxième et que sa dérivée "en x" est dominée par $t \mapsto te^{-\varepsilon t^2}$ qui est intégrable on a, par théorème de dérivation sous le signe intégral que I est de classe C^1 et que :

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-it)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= -\frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{d}{dt}(e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(e^{-itx})e^{-\varepsilon t^2}dt \text{ en intégrant par parties} \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{x}{2\varepsilon}I(x)
\end{aligned}$$

De fait $I(x) = I(0)e^{(x/2\varepsilon)/2}$. Or :

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt \text{ via } t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt = I(y-x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}e^{(y-x)^2/4\varepsilon}$$

Références

[QZ07] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition).* Dunod, 2007.