Leçon 241 : Suites et séries de fonctions - Exemples, Contre-exemples

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

On considérera des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. X sera un ensemble quelconque.

I Modes de convergence, propriétés :

1) Suites de fonctions : $f, f_n : X \to \mathbb{K}$

Déf 1 : On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si : $\forall x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente

Déf 2 : On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

NB 3 : convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple.

Réciproque fausse : $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Prop 4 : La convergence uniforme d'une suite (f_n) est équivalente au critère de Cauchy uniforme :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n, m \geq N, \sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f_m(x)|\} \leq \varepsilon$

2) Continuité, dérivabilité : Ici X sera métrique.

Thm 5 : Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ continue en a $\forall n \in \mathbb{N}$ et convergent uniformément vers f. Alors f est continue en a et : $\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

NB6 : Il suffit que (f_n) converge uniformément vers f au voisinage de a.

C.Ex7. $f_n(x)$ sur $[0,1]$ avec $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

On a une réciproque partielle.

Thm 8 : (Dini)

$X \subset\subset \mathbb{R}$, (f_n) converge simplement vers f avec f_n et f continues sur X. On suppose en outre que $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n$. Alors f_n converge uniformément vers f sur X.

Ex 9 : $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$ sur $[0,1]$.

Thm 9 : Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{K}$. On suppose que les f_n sont dérivables sur I, que la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction g et qu'il existe un $a \in I$, $(f_n(a))$ converge. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction dérivable f et on a de plus $f' = g$.

C.Ex10 $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$

3) Séries de fonctions :

Déf 11 : On dit que $\sum f_n$ converge simplement vers f sur X si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge simplement

Déf 12 : On dit que $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur X si $\sum f_n$ converge simplement et si la série des restes $\left(\sum_{k=n}^{\infty} f_k\right)$ converge uniformément vers 0.

Déf 13 : On dit que $\sum f_n$ converge normalement vers f sur X si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

NB 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme. La réciproque est fausse.

C.Ex 15 : $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0,1]$.

NB 16. En considérant la suite des sommes partielles on peut appliquer les théorèmes de continuité et de dérivabilité.

C.Ex 17 : $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$ mais n'est pas continue en 0.

C.Ex 18 : $\sum \frac{d(4^n x, \mathbb{Z})}{4^n}$ est continue et nulle part dérivable

NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

II Intégrabilité de suites et de séries de fonctions :

Ici $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré

① Convergences dans un espace mesuré : $f_n, f : X \to \mathbb{K}$

Déf 19 : On dit que (f_n) converge μ-presque partout (μ.pp) vers f sur X si on peut trouver $Y\subset X$, $\mu(X\setminus Y)=0$, $f_n|_Y$ converge simplement vers $f|_Y$.

Déf 20 : On dit que $(f_n)_n \subset (L^p)^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p si $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow[n\infty]{}$ $(1\le p\le\infty)$

NB 21 : Convergence L^p $(p<\infty)$ n'implique pas convergence μ.pp

C.Ex 22 : $n\ge1$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^N},\frac{k+1}{2^N}]}(x)$ avec $\begin{cases}2^N\le n+1<2^{N+1}\\ k=n-2^N+1\end{cases}$

② Théorèmes principaux :

Thm 23 : (Beppo Levi)
Soit $(f_n)\subset L^1(\mu)$ une suite croissante telle que $\sup\int f_n<+\infty$
Alors $\exists f\in L^1(\mu)$, f_n converge μ.pp vers f et $\|f_n-f\|_{L^1}\xrightarrow[n\infty]{}0$

Thm 24 : (Fatou)
Soit $(f_n)\subset L^1(\mu)$, $f_n\ge0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\sup\int f_n<+\infty$. Alors $\int \liminf_{n\infty} f_n \le \liminf_{n\infty}\int f_n$

C.Ex 25 : $f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,\frac1n]}$

NB 26 : La convergence μpp n'implique la convergence L^p pour $p<\infty$.

Thm 27 : (Convergence dominée)
Soit $(f_n)\subset L^1(\mu)$, f_n converge μ.pp vers f et $\exists g\in L^1(\mu)$
$\forall n\in\mathbb{N}$, μ.pp x, $|f_n(x)|\le g(x)$
Alors $\|f_n-f\|_{L^1}\xrightarrow[n\infty]{}0$

Ex 28 : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \lim_{n\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx = -\gamma$

Donnons une compensation à $L^p \not\Rightarrow \mu$.pp $(p<\infty)$

Thm 29 : $1\le p<\infty$, $(f_n)_n\subset L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $f_n \xrightarrow[n\infty]{\|\cdot\|_p} f$. Alors il existe une extraction φ, $f_{\varphi(n)}$ converge μ.pp vers f.

De même, donnons une compensation de μ.pp $\not\Rightarrow L^p$

Thm 30 : (Brezis Lieb) $1\le p<\infty$.
$(f_n)\subset L^p(\mu)$, $\sup_n \|f_n\|_p<+\infty$. On suppose que f_n converge μ.pp vers f. Alors $f\in L^p(\mu)$ et $\lim_{n\infty}\left(\|f_n\|_p^p - \|f_n-f\|_p^p\right) = \|f\|_p^p$.

Cor 31 : f_n converge μpp vers $f\in L^p$ et $\|f_n\|_p\xrightarrow[n\infty]{}\|f\|_p$. Alors $f_n\xrightarrow[n\infty]{\|\cdot\|_p} f$

NB 32 : On a donc une CNS pour que la convergence μpp implique la convergence L^p.

③ Interversion $\int$ et Σ :

Thm 33 : (Fubini)
$(f_n)\subset L^1(\mu)$, $\sum\|f_n\|_{L^1}$ converge. Alors $\sum f_n\in L^1$ et $\sum\int f_n = \int\sum f_n$

Thm 34 : $f_n:[a,b]\to\mathbb{K}$ $\mathcal{C}^0$. f_n converge uniformément vers f. Alors $\int_a^b f\,dx = \lim_{n\infty}\int_a^b f_n\,dx$

C.Ex 35 $f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n^2}x+\frac1n, & x\in[0,n]\\ \frac{1}{n^2}x+\frac1n, & x\in[-n,0] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $\forall n$, $\int f_n(x)\,dx = 1 \neq 0$

Références :

* Gourdon : Analyse
* Hauchecorne : Contre-exemples en maths
* Tauvel : Analyse complexe pour la licence
* Brézis : Analyse fonctionnelle
* Zuily-Queffélec : Analyse pour l'agrégation

NOM :

Prénom :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

III Séries entières, fonctions holomorphes : Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

① Séries entières : $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Lemme d'Abel : si $z_0\in\mathbb{C}$ et si $(a_n z_0^n)$ est borné alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r)$ $\forall r<|z_0|$.

Ex 36 : $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ $\forall z\in\mathbb{C}$

Déf 37 : Une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est dite développable en série entière (DSE) au voisinage V_a d'un point $a\in\Omega$ si $\forall z\in V_a$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$.

Prop 38 : f DSE en a $\Rightarrow$ $f\in\mathcal{C}^{\infty}(V_a)$ et $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

C.Ex 39 : $f(x)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)e^{-\frac{1}{x}}\in\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ mais pas DSE en 0.

DEV 1

Thm 40 : (Tauber Fort) Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a_n=O_{n\infty}(\frac{1}{n})$. On considère $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ pour $|x|<1$. On suppose que $F(x)\xrightarrow[x\to1]{}0$. Alors la série $\sum a_n$ converge vers 0

② Fonctions holomorphes :

Déf 41 : $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est dit holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable

Formule de Cauchy : $z\in D(a,r)\subset\Omega$ et f holomorphe sur Ω. Alors $f(z)=\int_{\mathcal{C}(a,r)}\frac{f(w)}{z-w}dw$

Cor 42 : Si f est holomorphe sur Ω alors f est DSE en chacun de ses points.

Thm 43 : $f_n, f:\Omega\to\mathbb{C}$ avec f_n holomorphe $\forall n\in\mathbb{N}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f. Alors f est holomorphe et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $\forall k\in\mathbb{N}$

Ex 44 : $\sum\frac{1}{n^z}$ $Re(z)>1$, fonction zêta.

IV Séries de Fourier : $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

① Définition :

$f\in L^1(\mathbb{T})$ si $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt<+\infty$; $e_n(t)=e^{int}$ $_{n\in\mathbb{Z}}$

$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt$ $\forall n\in\mathbb{N}$. pour $f\in L^1(\mathbb{T})$

Lemme de Riemann-Lebesgue : $\hat{f}(n)\xrightarrow{n\to\pm\infty}0$

② Théorèmes principaux :

$S_N(f)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{int}$ et $\sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)$

Théorème de Dirichlet : $f\in\mathcal{C}^1_m(\mathbb{T})$. Alors $(S_n(f))$ converge simplement vers $\check{f}$ avec $\check{f}(t)=\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$

Ex 45 : Calcul de $\sum\frac{1}{n^2}$ avec $f(x)=\frac{1-x^2}{\pi^2}$

Théorème de Féjer 46 : $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ alors $\sigma_n(f)\xrightarrow[n\infty]{\|\|_{\infty}}f$

Cor 47 : les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$

Prop 48 : $\mathcal{F}:L^1\to\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $f\mapsto(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective

Prop 49 : $f\in L^1$, et telle que $\sum|\hat{f}(n)|$ converge. Alors f est égale à sa série de Fourier et est continue.

Ex 50 : Formule sommatoire de Poisson : $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ et $|f(x)|=O_{\pm\infty}(\frac{1}{(1+|x|)^{\alpha}})$ pour $\alpha>1$. On suppose en outre que $\sum|\hat{f}(n)|<\infty$ alors $\sum f(n)=\sum\hat{f}(n)$

DEV 2

App 51 : Fonction $\theta(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 t}$, $t>0$, $\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$

③ Théorie L^2 : $f\in L^2(\mathbb{T})$

Thm 52 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$

Cor 53 : $\forall f\in L^2(\mathbb{T})$, $\|f-S_N(f)\|_{L^2}\xrightarrow[N\infty]{}0$

CEx 54 : $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}e^{int}\notin L^2(\mathbb{T})$