241 = Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

On considère les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Modes de convergence, propriétés

1) Suites de fonctions [GOU]

X désigne un ensemble qcq, $f : X \to \mathbb{K}$ fonction $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$

Déf 1 * On dit que $(f_n)_n$ converge simplement (sur X) vers f si $\forall x \in X$, $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ i.e si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

* On dit que (f_n) converge uniformément sur X vers f si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Prop 2 Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

Rem 3 Réciproque fausse

Contre-exple 4 $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0 sur $[0,1[$ mais pas uniformément

Prop 5 (Critère de Cauchy uniforme)
$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \forall x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$

Appl 6 * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) alors f est une fonction polynôme

2) Continuité et dérivabilité [GOU] + [HAU]

On suppose désormais que X est muni d'une métrique d.

Thm 7 Si (f_n) converge unif^t sur X vers f et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in X$ alors f est continue en x_0.

Cor 8 Si (f_n) est continue sur X et si (f_n) converge unif^t vers f sur X alors f est continue sur X.

Exple 9 Limite simple d'une suite de fonctions continues qui est discontinue

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ continue, converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ discontinue en 1

Thm 10 (Dini)
1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) cv simplement vers f continue sur I alors la convergence est uniforme
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles définies sur $I = [a,b]$ et convergeant simplement vers f continue sur I alors la convergence est uniforme

DVPT

Appl 11 Théorème de Glivenko-Cantelli
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires iid. Notons F la fonction de répartition commune des X_n et posons si $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{X_k \leq t}$ alors p.s $\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exple 12 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (f_n) converge unif^t vers $f(x) = e^x$

Thm 13 La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ limite uniforme de la fonction (F_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$ où (f_n) converge unif^t vers f et (f_n) continue

Thm 14 (Dérivabilité et dérivée de la fonction limite)
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
(i) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge
(ii) la suite de fonctions (f_n') converge unif^t sur $[a,b]$ vers une fonction g
Alors (f_n) converge unif^t sur $[a,b]$ vers f de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient $f' = g$

Cor 15 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n \in (\mathcal{C}^p([a,b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ on suppose que $\forall k \in \{0,1,\dots p\}$, $(f_n^{(k)})_n$ converge unif^t vers g_k sur $[a,b]$. Alors la limite uniforme $f = g_0$ de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ et vérifie $f^{(k)} = g_k$ $\forall k \in \{0,1,\dots p\}$

Exple 16 $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R})$ (f_n) converge unif^t vers 0 une fonction dérivable mais (f_n') ne converge pas.

3) Série de fonctions [GOU] + [HAU]

Thm 17 Si $\sum f_n$ converge simplement sur X et si sa somme est la fonction S, $\sum f_n$ CV unif^t sur X ssi $(R_n = S - S_n)_n$ converge unif^t sur X vers 0.

Rem 18 Réciproque fausse

Contre-exple 19 $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx}$

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ mais pas unif^t

Déf 20 On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement si $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge

Exple 21 $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[0,1]$

Thm 22 $\sum_{n \geq 0} f_n$ CV norm^t sur X $\Rightarrow$ $\sum_{n \geq 0} f_n$ CV unif^t sur X

Rem 23 Réciproque fausse

Contre-exple 24 $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}$ $\sum f_n$ converge unif^t sur $\mathbb{R}^+$ mais pas norm^t.

Thm 25 Si $(f_n)_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et si $\sum f_n$ CV unif^t sur X alors sa somme est une fonction continue sur X.

Exple 26 = Résultat faux si juste convergence simple $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)x^n$ $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue

Thm 27 Soit $\sum f_n$ définie sur $[a,b]$. On suppose que $f_n \in \mathcal{E}^1([a,b], \mathbb{R})$ et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge. Si $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$ alors $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ vers une fonction $\mathcal{E}^1$ sur $[a,b]$ et on a $(\sum f_n)' = \sum f_n'$

II. Intégrabilité de suites et séries de fonctions

1) Convergences dans un espace mesuré [BP]

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Déf 28 f_n CV μ-pp vers f sur X si il existe $Y \subset X$ tel que $\mu(X \setminus Y) = 0$ et que f_n CV simpl^t vers f sur Y.

Exple 29 Soit $x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ f_n CV λ-pp vers 0

Déf 30 $(f_n)_n \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exple 31 CV $L^p \not\Rightarrow$ CV μ-pp $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = \lambda$

$\forall n \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $f_{2^n + k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} 0$ et $\forall x \in [0,1[$, $\forall n \geq 0$ $f_{2^n + k_n^x}(x) = 1$

Exple 32 CV μpp $\not\Rightarrow$ CV L^p pour $p < +\infty$

$f_n = n^{1/p} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ CV μpp vers 0 mais $\|f_n\|_p = 1$ $\forall n$

2) Théorèmes principaux [BP] + [BR]

Thm 33 (Beppo-Levi) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu$

Appl 34 Lemme de Fatou : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives alors

$0 \leq \int_X \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n \, d\mu < +\infty$

Appl 35 Intégration d'une dérivée. Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ continue en 0 et 1 et dérivable λ-pp dans $[0,1]$ alors $\int_0^1 f'(x) \, dx \leq f(1) - f(0)$

Thm 36 (Convergence dominée) On suppose que (f_n) vérifie : (i) Pour tout n, $f_n \in L^1$, (ii) f_n CV μ-pp vers f (iii) Il existe $g \in L^1$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp. Alors $f \in L^1$ et $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ et $\lim \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$

Exple 37 Soit $f_n(x) = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$ $x \in [0,1]$, $f_n \to 0$ et $\lim \int_0^1 f_n(x) \, dx = 0$ par convergence dominée

Thm 38 Soit $(f_n)_n \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p$ tq $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) tq ⓐ $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ pp
ⓑ $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et pp sur X avec $h \in L^p$

3) Interversion $\int$ et Σ [BP]

Thm 39 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$
1) Si $f_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ alors $\int_X (\sum_{n\geq 1} f_n)\, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n\, d\mu$
2) Si $\sum_{n\geq 1} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$ alors f_n, $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ et la fonction définie μpp $\sum_{n\geq 1} f_n$ sont intégrables et $\int_X (\sum_{n\geq 1} f_n)\, d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_X f_n\, d\mu$

Appl 40 * Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de $\mathcal{A}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$
* Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure
Soit $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$
$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu \leq \varepsilon$

III. Séries entières [TAU]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$

Thm 41 (Lemme d'Abel) Soient $\sum a_n z^n$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $(a_n z_0^n)_n$ est bornée alors $\sum a_n z^n$ cv norm^t dans tout disque $D(0,r)$ avec $r < |z_0|$

Thm Déf 42 Soit $\sum a_n z^n$. $\exists !\, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que
(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ est divergente
R est le rayon de convergence de la série

Rem 43 Si $|z| = R$, on ne peut rien a dire a priori sur la cv.

Exple 44 * $\sum \frac{z^n}{n!}$ $R = +\infty$ * $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $R = 1$ * $\sum n! z^n$ $R = 0$

Déf 45 Soit f définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en z_0 s'il existe $\sum a_n z^n$ de rayon de cv $\neq 0$ et $V \in \mathcal{V}(z_0)$ dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in V$ $f(z) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Prop 46 Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et admettant un développement en série entière à l'origine. (i) Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable. (ii) Le dvpt en série entière de f à l'origine est donné par son dvpt de Taylor ie $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Exple 47 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ d'où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Contre-exple 48 Résultat faux sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} e^{-1/x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais pas développable en série entière

IV. Séries de Fourier [ZQ] + [OA] + [GOU] + [X-ENS]

1) Définitions

Déf 50 Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$

Exple 51 Soit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\hat{f}(0) = \frac{2}{3}$, $\hat{f}(n) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$ pour $n \geq 1$

Thm 52 (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $\hat{f}(n) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$

2) Théorèmes principaux

On pose $\forall N \in \mathbb{N}$ $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{int}$

Thm 53 (Dirichlet) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet en x_0 une limite à droite et à gauche et si $h \mapsto \frac{1}{h}[f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0^+) - f(x_0^-)]$ est bornée au voisinage de 0 alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$

Prop 54 (Convergence normale)
Si f est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$ alors S_N converge normalement vers f.

Appl 56 : Formule sommatoire de Poisson [DVPT]
Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et on suppose que
1) $\exists M > 0$ $\alpha > 1$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$
2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$ alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n)$

Appl 57 Soit $a \in \mathbb{R}^+$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$

Appl 58 Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

[GOU] Gourdon Analyse
[HAU] Hauchecorne
[OA] Objectif Agrégation
[ZQ] Zuily-Quéffélec
[X-ENS] Oraux X-ENS Analyse 4
[BP] Briane-Pagès
[BR] Brezis
[TAU] Patrice Tauvel <u>Analyse complexe pour la licence 3</u>