241 — SUITES & SÉRIES DE FONCTIONS - EXEMPLES & CONTRE-EXEMPLES

Un peu trop axé sur les dvpmts en série.

Critère de Leibniz: $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ cv $\Leftrightarrow \begin{cases} u_n \geq 0 \ \forall n \\ u_n \searrow \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$

I PREMIÈRES DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Soit X un ensemble, (E,d) un espace métrique

1- Types de Convergence

def 1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E. Gou

- (f_n) converge simplement vers $f : X \to E$ si $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
- (f_n) converge uniformément vers $f : X \to E$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Rq 2: (f_n) converge uniformément $\Rightarrow$ (f_n) converge simplement Gou

c-ex 3: $f_n : \begin{cases} [0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$, (f_n) converge vers 0 sur $[0,1[$ mais pas uniformément. Gou

prop 4: (Critère de Cauchy uniforme) Si E est complet, (f_n) converge uniformément ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p,q \geq N, \forall x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$ Gou

def 5: (Norme de convergence uniforme) Si E est un espace vectoriel normé, on note $B(X,E)$ l'espace des fonctions bornées de X dans E. Alors $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé où $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$ Gou

Conséquence : $(f_n) \in B(X,E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ssi $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

def 6: $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur X si la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément). TAU

Rq 7: $\sum f_n$ converge uniformément $\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge simplement

c-ex 8: $f_n : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx} \end{cases}$, $\sum f_n$ converge vers $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ sur $]0,+\infty[$ mais pas uniformément. HAU

def 9: Si E est un ~~Banach~~ evn, $(f_n) \in B(X,E)^{\mathbb{N}}$ alors $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Gou

Rq 10: $\sum f_n$ converge normalement $\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge uniformément. Gou

c-ex 11: $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \end{cases}$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement. HAU

Rq 12: $\sum f_n$ converge normalement si $\exists \sum a_n$ convergente telle que $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|f_n(x)\| \leq a_n$. Gou

ex 12: $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n/n^2 \end{cases}$ converge normalement sur $[0,1]$. Gou

2- Continuité, intégration et dérivation

thm 13: (F,δ) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions de (F,δ) dans (E,d). Si (f_n) converge uniformément sur F vers f et si f_n est continue en x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$, alors f est continue en x_0. Gou

thm 14: (f_n) suite de fonctions de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans E un Banach, si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si f_n est continue $\forall n \in \mathbb{N}$, alors f est continue et
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$ Gou

thm 15: (Convergence dominée) (f_n) suite de fonctions continues par morceaux de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans E un $\mathbb{K}$-evn complet, telle que : Gou

i) $\exists \varphi \geq 0$, continue par morceaux, intégrable sur I / $\|f_n\| \leq \varphi \ \forall n \in \mathbb{N}$
ii) (f_n) converge vers $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux

Alors f_n et f sont intégrables sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

Manque (a exemples) de contre ex sur les intégrales et suites | Converger dans L^1 sans cvg ponctuellement pp  | + Holomorphe + Cesàro. | Ajouter bcp de contrex

HAU **C-ex 16** : $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ continue et (f_n) converge vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ discontinue.

GOU **Coro 17** : $\sum f_n$ série de fonctions continues de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans E un Banach si $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt$

GOU **thm 18** : (f_n) suite de fonctions C^1 de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans E un Banach, si $\exists\, x_0 \in [a,b]$ / $(f_n(x_0))$ converge et si (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers g, alors (f_n) converge uniformément vers $f \in C^1[a,b]$ et $f' = g$.

DEV GOU ou GIR **thm 19** : (Théorème de Weierstrass) Toute fonction C^0 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

GOU **App 20** : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$; alors $f = 0$.

II SÉRIES ENTIÈRES

1- Convergence

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z \in \mathbb{C}$, soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

GOU **prop 21** : (Lemme d'Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors $\forall r$, $0 < r < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque ouvert $D(0,r)$.

GOU **déf 22** : $R := \sup\{r \geq 0 \,/\, (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$ est le rayon de convergence et $D(0,R)$ le disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

GOU **Rq 23** : On peut utiliser les règles de D'Alembert ($\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1/R$) ou de Cauchy ($|a_n|^{1/n} \to 1/R$) dans certains cas pour déterminer R.

GOU **ex 24** : $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = \infty$ par D'Alembert.

2- Continuité, dérivation, intégration

GOU **thm 25** : $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est C^0 sur $D(0,R)$.

thm 26 : $\forall z \in D(0,R)$, $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est dérivable, $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$ et $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ TAU

coro 27 : $\forall z \in D(0,R)$, $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est indéfiniment dérivable. De plus, $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$ TAU GOU

Conséquence : $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a même rayon R et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)' = f$

thm 28 : (Principe des zéros isolés) : Soit f la somme de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,R)$, si $\exists\, (z_p) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ / $z_p \to 0$ et $f(z_p) = 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$ alors $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. GOU

Conséquence : 2 séries entières dont les sommes coïncident au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales. GOU

thm 29 : (Formule de Cauchy) : Soit f la somme de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,R)$, $R > 0$, alors $\forall r \in]-R,R[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ni\theta} d\theta$ GOU

3 - Développement en série entière (dse)

déf 30 : Soit f définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. f est développable en série entière en z_0 si $\exists \sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $\forall z \in V$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ TAU

Thm 31 : Si f définie dans un voisinage de 0 admet un dse en 0 : Alors i) $\exists$ un voisinage de 0 sur lequel f est indéfiniment dérivable ii) Le dse de f en 0 est sa série de Taylor : $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ TAU

prop 32 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ / $0 \in I$, $f : I \to \mathbb{C}$ C^∞ est dse sur un voisinage de 0 ssi $\exists\, \alpha > 0$ / $R_n : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ tend vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$ GOU

c-ex 33 : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$ est C^∞, $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mais f n'est pas somme de sa série de Taylor (qui est nulle). GOU

ex 34 : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ est C^∞, $f^{(n)}(0) = 1$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

App 35 : On peut obtenir le dse de nombreuses fonctions : sin, cos, sh, ch ...

App36 : Résolution d'équations différentielles avec des séries entières

III SÉRIES DE FOURIER

1 - Définitions

déf37 : $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, $c_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est appelé polynôme trigonométrique de degré $\leqslant N$; $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est sa série trigonométrique.

prop38 : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{-n}|$ convergent, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, sa somme est C^0 et 2π-périodique

prop39. Si $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont réelles, décroissantes et convergent vers 0, alors $\sum c_n e^{inx}$ converge sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$.

déf40 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$: • $c_n(f) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt$ est appelé coefficient de Fourier de f. • $\sum c_n(f) e^{\frac{i 2\pi n t}{T}}$ est appelé série de Fourier de f.

déf41 : On appelle D l'espace préhilbertien des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues par morceaux telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ où $f(x^\pm) = \lim_{y \to x^\pm} f(y)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$.

prop42 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in D$. On note $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre et orthonormale dans D et le sous-espace $P_n := \mathrm{Vect}(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$ vérifie $P_n \oplus P_n^\perp = D$. La projection orthogonale p_n sur P_n vérifie $S_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = p_n(f)$ et
$$\inf_{g \in P_n} \|f - g\|_2^2 = \|f - S_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

2 - Convergence

thm43 : (Égalité de Parseval) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux. Alors $\sum |c_n(f)|^2$ converge et on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

ex44 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

thm45 : (Jordan - Dirichlet) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $h \mapsto \frac{1}{h}\left(f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)\right)$ est bornée au voisinage de 0. Alors $\sum c_n(f) e^{int_0}$ converge et $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$

coro46 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique & C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier converge en x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ (vers $f(x)$ si f est C^0 en x).

lemme47 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, C^0 et C^1 par morceaux, on note $\varphi : t \mapsto \begin{cases} f'(t) & \text{si } f \text{ est dérivable en } t \\ \frac{1}{2}[f'(t^+) + f'(t^-)] & \text{sinon} \end{cases}$
Alors les coefficients de Fourier de φ vérifient $c_n(\varphi) = in\, c_n(f)$.

thm48 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, C^0 et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

thm49 : (Théorème de Fejér) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^0, 2π-périodique, on note $S_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$ et $C_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1}$. Alors (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. DEV p286

thm50 : (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^1 telle que $f(x) \underset{\pm\infty}{=} O(1/x^2)$ et $f'(x) \underset{\pm\infty}{=} O(1/x^2)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, DEV p272
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi x} \quad \text{où} \quad f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

REFÉRENCES :

- Gourdon, Analyse (GOU)
- Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3 (TAU)
- Hauchecorne, les contre-exemples en mathématiques. (HAU)
- Girardin & Limnios, Probabilités en vue des applications, tome 1. (GIR)

Un peu court

Théorême de Weierstrass

Damien Le Gléau, Fanny Remoué

23 novembre 2014

Théorême de Weierstrass

Toute fonction continue $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Démonstration.

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, la moyenne empirique de $(X_n)_n$

Posons pour tout $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \mathbb{E}[f(\overline{X}_n)] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k}$

Pour tout $\delta > 0$, on peut écrire :

$$\left|\mathbb{E}\left[f(\overline{X}_n) - f(x)\right]\right| \leq \underbrace{\mathbb{E}\left[|f(\overline{X}_n) - f(x)|\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n - x|<\delta\}}\right]}_{(i)} + \underbrace{\mathbb{E}\left[|f(\overline{X}_n) - f(x)|\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n - x|\geq\delta\}}\right]}_{(ii)}$$

Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1]$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Pour ce δ, on a $(i) \leq \epsilon$.

Soit $M := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$,

$$\begin{aligned} \textit{On a } (ii) &\leq 2M\,\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - x| \geq \delta\right) \\ &\leq \frac{2MVar(\overline{X}_n)}{n\delta^2} \qquad \text{par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev} \\ &\leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2} \end{aligned}$$

D'où pour n assez grand, on a $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\mathbb{E}\left[f(\overline{X}_n) - f(x)\right]\right| \leq 2\epsilon$

D'où f est limite uniforme de la suite de polynômes $(P_n)_n$

□

Application :

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n \,\mathrm{dt} = 0$

Alors f est la fonction nulle.

La propriété vérifiée par f entraîne par linéarité $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n \,\mathrm{dt} = 0$ pour toute fonction polynôme P. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonction polynôme $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers $\overline{f}$ sur $[0,1]$. De plus f est bornée sur $[0,1]$ (continue sur un compact) donc la suite de fonctions $(f\,P_n)$ converge uniformément vers $f\bar{f} = |f|^2$ sur $[0,1]$. Comme $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,P_n(t)\,\mathrm{dt} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \,\mathrm{dt} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\,P_n(t)\,\mathrm{dt} = 0$$

La fonction $|f|^2$ est continue et positive, donc elle est nulle sur $[0,1]$, d'où $f \equiv 0$ sur $[0,1]$.

$\diamond$

Ref: Girardin-Limnios

Théorème de Fejér

Damien Le Gléau, Fanny Remoué

23 novembre 2014

Théorème de Fejér

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\begin{array}{rl} \mathrm{e}_k : & \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ & x \mapsto \mathrm{e}^{ikx} \end{array}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions :

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k, \qquad C_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$$

(où $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-ikt}\, \mathrm{d}t$, sont les coefficients de Fourier de f), et

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}_k, \qquad \widetilde{C}_n = \frac{\widetilde{S}_0 + \ldots + \widetilde{S}_n}{n+1}$$

Alors la suite de fonctions $(C_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

Démonstration.

1) Montrer que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{d}t = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2) Montrer : $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $(\widetilde{C}_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\pi, \pi] \backslash [-\alpha, \alpha]$
3) En déduire le théorème de Fejér.

1) On a $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\, \mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ et $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)\, \mathrm{d}t = 1$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S}_n(t)\, \mathrm{d}t \right) = 1$

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \widetilde{S}_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{-inx} \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)ix} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-inx} \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{2})ix}}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
\widetilde{C}_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{S}_k(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\Im\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{(k+\frac{1}{2})ix}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \qquad \text{calcul analogue à } \widetilde{S}_n(x)
\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in]0, \pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus [\alpha, \alpha]$, $\left|\widetilde{C}_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$

On a donc que la suite $(\widetilde{C}_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$

3)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, \mathrm{dt} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \widetilde{S}_n(x-t)\, \mathrm{dt} \end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \widetilde{C}_n(x-t)\, \mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, \widetilde{C}_n(u) \mathrm{du} \qquad \text{cdv: } u = x - t, \text{ et par } 2\pi \text{ périodicité de f et } \widetilde{C}_n \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et donc, on a :

$$\exists \alpha \in]0, \pi[,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (\ |x - y| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon\ )$$

f étant continue et périodique, elle est bornée, et on note M, un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{dt} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{dt} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \epsilon\, \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{dt} \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \widetilde{C}_n(t)\, \mathrm{dt} + \epsilon \qquad (\text{ cf } (1)\ ) \end{aligned}$$

Et comme $(\widetilde{C}_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \widetilde{C}_n(t) \mathrm{dt} \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$, de sorte que $|f(x) - C_n(x)| \leq \left(\dfrac{M}{\pi}\right) \epsilon + \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq N$.

□

Ref : Gourdon p 287

Formule sommatoire de Poisson

Damien Le Gléau, Fanny Remoué

23 novembre 2014

Formule sommatoire de Poisson
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O_{|x|\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O_{|x|\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Alors, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi nx} \qquad , \text{où } \hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.
La série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segments de $\mathbb{R}$. En effet, si $M > 0$ est tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x| \geq 1$, on a pour tout $K > 0$:

$$\forall x \in [-K, K],\ \forall n \in \mathbb{Z},\ tq\ |n| > K+1, \quad |f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F.
De même, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segments de $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions qui entraîne que F est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, F est 1-périodique car si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on en déduit $F(x+1) = F(x)$.

Les coefficients de Fourier de F sont données par :

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\,\mathrm{dt} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\,\mathrm{dt} \quad \text{car} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \overset{CVU}{\underset{sur}{\longrightarrow}}{}^{[0,1]}\, F \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\,\mathrm{dt} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\,\mathrm{dt} \qquad \textit{car } \left|f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\right| = O_{|x|\to\infty} = \frac{1}{x^2} \\
&= \hat{f}(n)
\end{aligned}
$$

Et comme F est de classe C^1, sa série de Fourier converge uniformément vers F, d'où la formule sommatoire de Poisson. □

<u>Application</u> (ex 13 p120 (zuily-queffélec)) : Soit $a > 0$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth \pi\, a$

Posons $f(t) := \mathrm{e}^{-2\pi a|t|}$, $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi t x} f(t)\,\mathrm{dt} = \frac{a}{\pi\,(a^2+x^2)}$
les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées, donc on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi a|n|} = 2\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-2\pi\, a n} - 1 = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}} - 1 = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}} \\
&= \coth(\pi a)
\end{aligned}
$$

D'où le résultat.

Ref : Gourdon p 273
Zuily-Queffélec p 120