241 : Suites et séries de fonctions, exemples et contre-exemples

X un ensemble. (E, d) un espace métrique. $\mathcal{F}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E.

I - Généralités. [COM]

1) Définitions

Déf 1 : $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(X,E)$ converge vers $f\in\mathcal{F}(X,E)$

- Simplement : $\forall x\in X, (f_n(x))_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ ($f_n \xrightarrow{s} f$).
- Uniformément : $\forall \varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall x\in X, \forall n\geq N, |f_N(x)-f(x)|\leq\varepsilon$

C'est équivalent à : $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq 0$.

($f_n \xrightarrow{unif} f$).

Ex 2 : $f_n : x\mapsto x^n$: - diverge sur $]1,+\infty[$

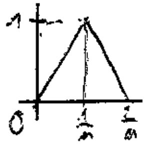
- $f_n \xrightarrow{s} f : \begin{cases}0 & \text{sur } [0,1[\\ 1 & x=1\end{cases}$ - $f_n \xrightarrow{unif} 0$ sur $[0,a[$, $a<1$.

Ex 3 : $\underbrace{f_n}_{\text{Borné sur } \mathbb{R}} : x\mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x|\leq \frac1n \\ \frac1x & \text{sinon}\end{cases} \xrightarrow{s} \frac1x$ pas borné sur $\mathbb{R}$.

Th 4 : (Dini) X compact. $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(X,E)$, $f_n \xrightarrow{s} f$. Si f et f_n sont continues, et que $(f_n)_n$ est décroissante, alors $f_n \xrightarrow{unif} f$.

Ex 5 : $(P_n)_n : \begin{cases}P_0=0\\ P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac12(x-P_n(x)^2)\end{cases}$ respecte les hypothèses, donc $P_n \xrightarrow{unif}\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Ex 6 :

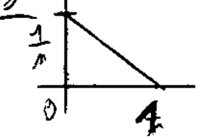


Pas de monotonie.
Pas de convergence uniforme.

- $f_n : x\mapsto \sum_n \frac{x}{n^2+x^2}$ pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
- $x\mapsto x^n$ sur $[0,1]$. $f_n \xrightarrow{s} f$ pas continue, pas de cv uniforme.

Th 7 : $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(X,E)$ converge uniformément vers f, et, $\forall n$, f_n continue en x_0, alors f est continue en x_0.

Ex 8 :



$\xrightarrow{unif} 0$ qui est continue.

Ex 9 : $x\mapsto x^n$ converge simplement vers f non continue sur $[0,1]$.

Th 10 : (Weierstrass) DVPT1 [COM]

Toute fonction réelle sur $[a,b]$ est limite uniforme de polynôme.

Ex 11 : e^{-x} sur $[a,b]$ est limite uniforme de $x\mapsto\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

Ex 12 : $x\mapsto\frac1x$ sur $]0,1]$, pas bornée donc ne peut pas être limite uniforme de polynômes,

2) Dérivabilité, intégration - X borné.

Th 13 : $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(X,E)$, x_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_0) = 0$, si $f_n' \xrightarrow{unif} g$ sur X, alors $f_n \xrightarrow{unif} f$ et $f' = g$.

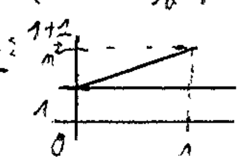
Ex 14 : $x^n \xrightarrow{unif} 0$ sur $[0,a[$, donc $\frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{unif} 0$.

Ex 15 : - $\frac{1}{n} \xrightarrow{unif} 0$ mais $\frac{x}{n} \xrightarrow{s} 0$ sur $\mathbb{R}$.

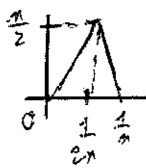
- $f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\frac{x^2}{2} & \text{si } x \le \frac{1}{n} \\ \log(x) & \text{sinon} \end{cases}$; $f_n' : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

$f_n' \xrightarrow{s} \frac{1}{x}$, et $f_n \xrightarrow{s} \log(x)$.

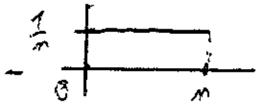
Th 16 : f_n continues sur $[a,b]$, si $f_n \xrightarrow{unif} f$, alors $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,dt\right) \xrightarrow{unif} \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\right)$.

Ex 17 : 

$\xrightarrow{unif} 1$ sur $[0,1]$, et $\int_0^1 f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 1\,dt = 1$.

Ex 18 : - 

$\int_0^1 f_n = \frac{1}{4}$, $\forall n$, $f_n \xrightarrow{s} 0$ et $\int 0 = 0$.

- 

$f_n \xrightarrow{unif} 0$ sur $\mathbb{R}$, mais $\forall n$, $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$.

3) Séries de fonctions

On étend les résultats précédents aux séries en posant $\sum_n f_n = g_n$. De plus :

Déf 19 : On suppose chaque f_n borné sur X. $\|f_n\| = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$. La série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur X si la série $\sum \|f_n\|$ converge.
La convergence normale implique la convergence uniforme.

Ex 20 : $\sum \frac{\cos(x)}{n^2}$ converge normalement.

Ex 21 : $\sum \frac{\sin^2(x)}{n}$ converge uniformément, pas normalement.

Th 22 : (Borel) **DVPT 2** [COM].

$(a_n)_n$ suite de complexes. Il existe une infinité de fonctions réelles telles que : $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, ..., $f^{(n)}(0) = a_n$.

II - Séries entières [GOU]

Déf 23 : Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Déf-Lemme 24 : S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(|a_n z_0^n|)_n$ soit bornée, alors $\forall |z| < |z_0|$, $\sum_n a_n z^n$ converge normalement.

Rayon de convergence : $R = \sup\{z \in \mathbb{C} \mid (|a_n z^n|)_n \text{ bornée}\}$

Ex 25 : $\sum z^n$, $z_0 = 1$, $(z_0^n)_n$ est bornée. $z_0 = \frac{1}{2}$ aussi mais ce n'est pas le supremum.

Prop 26 : - Critère de d'Alembert : $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$, $R = \frac{1}{\lambda}$.

- Critère de Cauchy : $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$, $R = \frac{1}{\lambda}$.

Ex 27 : $\sum 2^n z^n$, $R = \frac{1}{2}$; $\forall \alpha$, $\sum n^\alpha z^n$, $R = 1$; $\sum n! z^n$, $R = 0$.

Prop 28 : $z \longmapsto \sum a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$.

Ex 29 : Théorème des lacunes d'Hadamard, il peut y avoir des points de discontinuité sur $\{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$.

Prop 30 : $\sum a_n z^n$ est C^∞ sur $\{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$.

- $(\sum_n a_n z^n)' = \sum n a_n z^n$ a le même rayon de convergence.

- $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$, donc $\sum a_n z^n = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Ex 30 : $\left(\sum_n \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, $f' = f$, $R = \infty$.

Prop 32 : DSE usuels. $e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$; $\ln(1-x) = \sum_n \frac{x^n}{n}$; $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$.

III - Séries de Fourier [GOU].

Déf 33 : f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t) dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt) f(t) dt$.

On définit la série de Fourier de f : $S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

où : $S(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$.

De plus : $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$; $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Th 34 : (Dirichlet). Si f est 2π-périodique et C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(f)$ converge en x vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Th 35 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Ex 36 : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

$a_0(f) = \frac{4}{3}$, $b_n(f) = 0$ par parité de f,

$\forall n \geq 0$, $a_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2\pi^2}$.

$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

$x = \pi$, $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

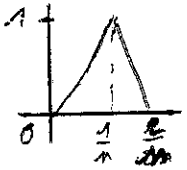
$x = 0$, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Annexe :

Références : "Analyse, 2e édition", Gourdon [GOU]

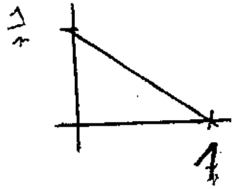
- "Suites et séries", Jean Combes. [COM].

Ex 6 :



$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \end{cases}$$

Ex 9 :

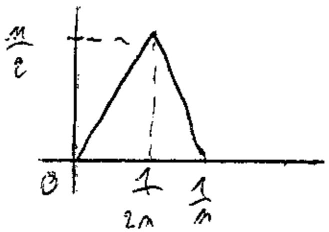


$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{x}{n} & \text{si } x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex 17 :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{n^2} & \text{si } x \le 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ex 18 :



$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \le \frac{1}{2n} \\ n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ex 36 : Avec l'égalité de Parseval, on obtient aussi : $\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\sum_n \frac{16}{n^4\pi^4} = \frac{8}{15}$, d'où : $\sum_n \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Égalité de Parseval : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$.

Théorème 1. *Soit* (a_n) *une suite quelconque de nombres réels ou complexes. Il existe une infinité de fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *infiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, \ldots, f^{(n)}(0) = a_n, \ldots$.

Lemme 1. *La fonction* φ *définie par* $\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ *si* $x \neq 0$, *et* $\varphi(0) = 0$ *est infiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et elle est nulle à l'origine ainsi que toutes ses dérivées.*

Démonstration 1. φ *est évidemment continue en* 0, *et indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *ses dérivées successives étant, pour* $x \neq 0$, *le produit de* $e^{-\frac{1}{x^2}}$ *par un polynôme en* $\frac{1}{x}$.
Si $x \to 0$, $(x \neq 0)$, $\varphi'(x) \to 0$ *: cela entraîne que* $\varphi'(x)$ *existe et est égal à* 0. $\varphi'(x)$ *est ainsi définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
Si $x \to 0$, $(x \neq 0)$, $\varphi''(x) \to 0$ *: donc* $\varphi''(x)$ *existe et vaut* 0. $\varphi''(x)$ *est ainsi définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
Ainsi de suite.

Lemme 2. *Il existe une fonction* g *infiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que pour tout* x, *on ait* $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, *que* $g(x) = 0$ *pour* $|x| \geqslant 1$ *et* $g(x) = 1$ *pour* $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

Démonstration 2. *La fonction* $x \mapsto a(x)$ *définié par* $a(x) = 0$ *pour* $x \leqslant -1$ *ou* $x \geqslant -\frac{1}{2}$ *et* $a(x) = \exp\left(-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)$ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *d'après le lemme 1.*
Sa primitive $A(x) = \int_{-1}^{x} a(t)dt$ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$, *nulle pour* $x \leqslant -1$, *strictement croissante sur* $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, *constante pour* $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
La fonction paire g *définie par* $g(x) = \frac{A(x)}{A(-\frac{1}{2})}$ *pour* $x \leqslant 0$ *a les propriétés requises.*

Démonstration du théorème :
Posons $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}\, g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ avec $\lambda_n = 1$ si $|a_n| \leqslant 1$ et $\lambda_n = \frac{1}{|a_n|}$ si $|a_n| > 1$, et g la fonction définie au lemme 2. On a, pour tout n, $0 < \lambda_n \leqslant 1$ et $|a_n|\lambda_n \leqslant 1$.
La série converge normalement sur $\mathbb{R}$ car son terme général $u_n(x) = a_n \frac{x^n}{n!}\, g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ est nul pour $x \geqslant \lambda_n$ et $|u_n(x)| \leqslant \frac{|a_n|\lambda_n^n}{n!}$ qui est $\leqslant \frac{\lambda_n^{n-1}}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$ si $n \geqslant 1$. f est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Remarquons que $f(x)$ est nul si $|x| \geqslant 1$, tous les $u_n(x)$ étant nuls.

Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$.

$$u_n'(x) = \frac{a_n}{\lambda_n} \frac{x}{n!} g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) + a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

(seul le premier terme existe si $n = 0$).

Notons $M_1, \dots, M_k, \dots$ les maxima de $|g'|, \dots, |g^{(k)}|, \dots$ sur $[-1, 1]$ (ou sur $\mathbb{R}$). $g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ et $g'\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ étant nuls pour $|x| \geqslant \lambda_n$, on trouve pour $n \geqslant 2$, en utilisant les propriétés $0 < \lambda_n \leqslant 1$ et $|a_n|\lambda_n \leqslant 1$,

$$|u_n'(x)| \leqslant \frac{\lambda_n^{n-2}}{n!} M_1 + \frac{\lambda_n^{n-2}}{(n-1)!},$$

donc $|u_n'(x)| \leqslant \frac{M_1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$. Ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$|u_0'|$ et $|u_1'|$, continus et nuls en dehors de $[-1, 1]$, ont des maxima qu'il est inutile de préciser.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$; f a donc sur $\mathbb{R}$ une dérivée continue f' et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

De la même façon on prouve que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, quel que soit l'entier $k > 0$.

En effet, pour $n > k$, la formule de Leibniz nous donne :

$$u_n^{(k)}(x) = a_n \left[\frac{x^n}{n!\lambda_n^k}\, g^{(k)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) + \frac{kx^{n-1}}{(n-1)!\lambda_n^{k-1}}\, g^{(k-1)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) + \dots + \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\, g\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right]$$

et $|u_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{M_k}{n!} + \frac{kM_{k-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{(n-k)!}$, qui est le terme général d'une série convergente.

f est donc infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Pour le calcul de $u_n^k(0)$, on peut remplacer $u_n(x)$ par $\frac{a_n x^n}{n!}$, qui coïncide avec $u_n(x)$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\lambda_n}{2}, \frac{\lambda_n}{2}\right]$, donc $u_n^k(0) = 0$ si $n \neq k$ et $u_k^k(0) = a_k$.

Donc $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, \dots, f^{(k)} = a_k, \dots$.

On a ainsi construit une fonction f répondant à la question, et le lemme 1 nous permet d'en construire une infinité d'autres de la forme :

$$x \mapsto f(x) + Ce^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Théorème 1. *Toute fonction rélle ou complexe définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est, sur cet intervalle, limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Démonstration :
Nous procéderons en plusieurs étapes :

Étape 1 :
On suppose $a = 0$ et $b = 1$. On généralise en faisant le changement de variables $x = a + (b-a)t$.

Étape 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour toute fonction f réelle ou complexe définie sur $[0, 1]$, on définit le polynôme suivant :

$$L_n(f) : x \mapsto P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

les C_n^k étant les coefficients du binôme $(x+y)^n$.

On a :

$$\frac{x(1-x)}{n} P_n'(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or, en posant $xf : x \mapsto xf(x)$, on remarque que :

$$L_n(xf)(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On en déduit :

$$\frac{x(1-x)}{n} \frac{dL_n(f)}{dx} = L_n(xf) - xL_n(f).$$

On peut ainsi faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (x + (1-x))^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{x(1-x)}{n} \frac{dL_n(1)}{dx} + xL_n(1) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n(x^2) &= \frac{x(1-x)}{n} \frac{dL_n(x)}{dx} + xL_n(x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n} \end{aligned}$$

De plus, en remarquant que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = L_n(x^2) - 2xL_n(x) + x^2L_n(1)$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{1}$$

Étape 3 :
Soit f une fonction réelle ou complexe continue sur $[0,1]$, et soit $P_n = L_n(f)$ le polynôme associé correspondant à l'entier n. On va prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Tout d'abord, on remarque que :

$$P_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) x^k(1-x)^{n-k}$$

La fonction f continue sur $[0,1]$ y est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il lui correspond η tel que : pour tout x et tout x' de $[0,1]$ vérifiant $|x - x'| \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $K = \{k \leqslant n / \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \eta\}$. Pour tout $k \in K$, on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.
Donc :

$$\left|\sum_{k\in K}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon$$

Quant aux valeurs de k tel que $k \in K^C$, par l'équation (1) et en remarquant que le maximum de $\frac{x(1-x)}{n}$ est atteint pour $x = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4n}$,

$$\sum_{k\in K^C} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}$$

Donc

$$\sum_{k\in K^C} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\eta^2}.$$

Posons $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$. On a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2M$, et par suite

$$\left|\sum_{k\in K^C}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant \frac{M}{2n\eta^2}$$

Finalement, $\varepsilon > 0$ étant donné, on lui a fait correspondre $\eta > 0$ tel que, pour tout $n > 0$ et tout $x \in [0,1]$, on ait $|P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\eta^2}$. Si $n \geqslant \frac{M}{2\eta^2\varepsilon}$, on a, pour tout $x \in [0,1]$, $|P_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, d'où le résultat énoncé.