241

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : On considère les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- Suites de fonctions

1°/ Modes de convergence

X un espace métrique, f une fonction de X dans $\mathbb{K}$ et (f_n) une suite de X dans $\mathbb{K}$

[GOU 221] Déf 1 : * On dit que $(f_n)_n$ converge simplement sur X vers f si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

* On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers f si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

[MARCO] Ex2 : * $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{cvs} \begin{cases} 1 & t \in [0;1[\\ 1/2 & t = 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$

* $f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{cvu} |t|$ sur $\mathbb{R}_+$

[GOU] Prop3 : La convergence uniforme entraine la convergence simple.

Ex4 : $f_n : [0;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ cvs vers 0 sur $[0;1[$ mais pas uniformément.

Prop5 : (Critère de Cauchy) f_n cvu vers f sur X ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geq N\ \forall x \in X\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$

Appl. 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonction polynôme (P_n) alors f est une fonction polynôme.

2°/ Continuité et dérivabilité

C-C7 : $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ cvs vers $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in [0;1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

f_n est continue alors que f non.

Thm8 : Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X et si toutes les fonctions f_n sont continues en x_0 alors f est continue en x_0

↳ permet de montrer la non convergence uniforme d'une suite de fonction.

Ex9 : $f_n(x) = e^{-nx}$ cvs sur $\mathbb{R}_+$

On a une réciproque partielle du thm 8 :

[GOU] Thm10 : (de Dini) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues réelles sur $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

[H+R] Ex11 : La suite $(P_n)_n$ définit par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$ sur $[-1;1]$ cvu vers $|x|$

[Hauch] C-C12 : * La condition de compacité est nécessaire $f_n :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{nx}$

* La condition f continue est nécessaire $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0;1] \xrightarrow{d} \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x^n$

[MADS] [GOU] X Thm13 (de Dini) Soit (f_n) une suite de fonction croissante réelles, continues sur $I = [a;b]$ et cvs vers une fonction f continue sur I, alors la cv est uniforme

Ex14 : $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$ cvu vers e^x

[Hauch] CC15 : * Suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction f qui n'est pas dérivable : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ cvu sur $\mathbb{R}$ vers $|x|$

* Suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable alors que la suite f_n' ne cv pas : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

Pour obtenir un résultat intéressant, il faut des hypothèses plus fortes :

[GOU] Thm16 : Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1$ de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

* il existe $x_0 \in [a;b]$ tq $(f_n(x_0))$ converge
* f_n' converge uniformément vers g

Alors (f_n) converge uniformément vers f de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f' = g$

Ex16 bis : $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{cvu} 0$ sur $[0;a]$ avec $a < 1$, alors $\frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{cvu} 0$ X

3°/ Intégrations

<u>Thm 17</u> : (Beppo-Levi) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions positives et mesurable alors $\lim f_n$ est mesurable et $\int_X (\lim_n f_n)\, d\nu = \lim_n \int_X f_n\, d\nu$ CBP

<u>Appl. 18</u> : (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables ≥ 0. Alors $0 \leq \int \underline{\lim_n} f_n\, d\nu \leq \underline{\lim_n} \int f_n d\nu$

<u>Appl. 19</u> : Soit f une fonction croissante sur $[0;1]$ continue en 0 et 1 et dérivable λ-pp sur $[0;1]$
Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0)$

<u>C-C 20</u> : $\forall n \geq 1$, $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0;n]} \xrightarrow{cvu} 0$ sur $\mathbb{R}_+$, mais $1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \neq \int_{\mathbb{R}_+} f = 0$

<u>Thm 21</u> : Soit (f_n) une suite de fonctions continues d'un segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$, qui cvu vers f sur $[a;b]$
Alors f est continue et $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$ [Gou]

<u>Ex 22</u> : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\, dx = 1 - e^{-1}$ [AMR]

<u>C-C 23</u> : Soit $f_n(x) = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$, pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0;1]$
On ne peut pas appliquer le thm 21 CBP

On a également l'interversion pour des hyp. moins contraignantes :
<u>Thm 24</u> : (de convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'élts de $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ vérifiant : * μ-pp. $f_n(x)$ converge qd $n\to+\infty$
* il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$
Alors il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ μpp
et $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,d\nu = \int_X f\,d\nu$

<u>Ex 25</u> : * $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ dans le c-c 23
* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,dx = 0$ [AMR]

<u>Appl. 26</u> : Soit f une fonction partout dérivable sur $[0;1]$ de dérivée f' bornée. Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ CBP

C-EX ?

II – Séries de fonctions

1°/ Lien avec les suites de fonctions

<u>Déf 27</u> : Une <u>série de fonctions</u> $\sum g_n$ est définie comme étant la suite de fonction (f_n) avec $f_n = g_0 + \dots + g_n$

<u>C-C 28</u> : $f_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-nx}$ $\quad \sum f_n$ cvs mais pas unif.

<u>C-C 29</u> : $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1-x)x^n$ $\quad \sum f_n$ cvs vers $S(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0;1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2°/ Nouveau mode de convergence

<u>Thm 30</u> : Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X et si sa somme est la fonction S, la série $\sum f_n$ cvu sur X ssi la suite de fonctions $(R_n = S - S_n)$ cvu sur X vers l'appl. nulle de X dans $\mathbb{K}$ [Gou]

<u>Prop 31</u> : Soit $\sum (-1)^n g_n$ une série de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ telle que : * pour chaque $x \in X$, la suite $(g_n(x))_n$ est décroissante
* la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur X vers 0
Alors la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n g_n$ converge uniformément sur X [AMR]

<u>Ex 32</u> : $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ $\quad \sum_{n\geq 0} f_n$ cvu sur $[0;1]$ [Hauch]

<u>Déf 33</u> : On dit que la série $\sum f_n$ <u>converge absolument</u> sur X si pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum |f_n(x)|$ converge [AMR]

<u>Ex 34</u> : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ converge Abs

<u>Prop 35</u> : La convergence absolue entraine la convergence simple

<u>C-C 36</u> : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \times \frac{x}{n}$ sur $\mathbb{R}_+$ converge mais ne cv pas Abs

<u>Déf 37</u> : On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ <u>converge normalement</u> si $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge [Gou]

<u>Ex 38</u> : La série $\sum g_n$ définie par $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^n}{n^2}$ cvn sur $[0;1]$.

Thm 39 : * Une série de fonctions $\sum f_n$ qui cvn sur X cvu sur X

* Une série de fonctions $\sum f_n$ qui cvn sur X converge absolument sur X

Rmq 40 : Il n'y a pas de lien entre cv uniforme et converge absolue.

[Gou] **CC41** : * La série de fonctions $\sum f_n$ où f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = (-1)^n \times \frac{x}{n^2+x^2}$ cvu sur $\mathbb{R}_+$ mais la convergence n'est pas normale

* $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ sur $]0;+\infty[$ cv abs mais pas normalement

3°/ Interversion somme et intégrale

[BP] **Thm 42** : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables

* Si les fonctions f_n sont positives pour tout $n\geq 1$, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1}\left(\int_X f_n \, d\mu\right)$

* Si $\sum_{n\geq 1} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1}\left(\int_X f_n \, d\mu\right)$

Ex 43 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$

III- Exemples de séries

1°/ Séries entières

[Gou 235] **Déf 44** : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.

Lemme 45 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :
* $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est abs convergent

Déf 42 : Le nombre $R = \sup\{r\geq 0 \,/\, \text{la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence.

Thm 43 : * pour tout $z\in\mathbb{C}$ tq $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ cv abs

* pour tout $z\in\mathbb{C}$ tq $|z|>R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Rmq 44 : Si $|z| = R$, on ne peut rien dire a priori sur la convergence de $\sum a_n z^n$

[Amr 238] [Gou] **Thm 45** : Une série entière converge normalement sur tout compact inclus sur le disque de convergence.

Thm 46 : l'appl. $f :]-R;R[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$

la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ a même rayon de cv que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et on a $\forall x\in]-R;R[$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Thm 47 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R\geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0;\frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C}, |z|<1 \text{ et } \exists \rho>0, \exists \theta\in[-\theta_0,\theta_0], z = 1-\rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\boxed{\text{DVPT}_1}$

Thm 48 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R=1$ et f sa somme sur le disque unité. On suppose que $\exists S\in\mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$. Ainsi, si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum a_n$ cv et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

2°/ Séries de Fourier

Déf 49 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et $\mathcal{C}M$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle coefficient de Fourier : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$

On appelle série de Fourier : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$

Ex 50 : Soit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$

$a_0(f) = \frac{4}{3}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}$

Thm 51 : * Soit $f \in \mathcal{C}M_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $\tilde{f}$ où $\tilde{f} = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$

* Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f

Appl. 52 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Appl. 53 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = \underset{|x|\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $f'(x) = \underset{|x|\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}$

Avec $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi nt} \, dt$.

Appl. 54 : $\forall s>0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$ $\boxed{\text{DVPT}_2}$

[GOU] Gourdon analyse
[MARCO] Marco - mathématiques L2
[H-R] Hirsch - Lacombe - Elts d'analyse fonctionnelle
[Hauch] - Hauchecorne - Contre-exemples
[MAD] Madère - Leçon d'Analyse
[BP] Briane - Pagès Théorie de l'intégration
[AMR] El Amrani - Suites et séries

Développement: Formule sommatoire de Poisson et application

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

11 septembre 2016

Référence : Gourdon analyse, page 272

On introduit une nouvelle normalisation de la transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}dt$

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi xn}$

Application : $\forall s > 0 \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Etape 1 : Une idée pour construire des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ à partir d'une fonction non périodique f consiste à considérer la série $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$

On veut montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall K > 0\ \forall x \in [-K, K]$, $|\, x+n \,| \geqslant n - |\, x \,| \geqslant n - K$

Comme $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$, on a alors $\exists M > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\, x \,| \geqslant 1$, $|\, f(x) \,| \leq \frac{M}{x^2}$

On a $|\, f(x+n) \,| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(n-K)^2}$ indpt de x et terme général d'une série convergente

Donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Notons $F = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ sa limite simple.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sur les suites de fonctions car on a :
- la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge simplement vers F
- la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f'(\cdot + n)$ converge uniformément
- les fonctions $f(\cdot + n)$ sont de classe C^1

Ainsi, F est de classe C^1 sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc sur tout $\mathbb{R}$ par continuité.

Etape 2 :

De plus, F est 1-périodique car si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$ donc en faisant $N \to +\infty$, on en déduit $F(x+1) = F(x)$

Etape 3 : On calcule les coefficients de Fourier de F, pour $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t \\ &\overset{1}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\underbrace{\mathrm{e}^{2i\pi nk}}_{=1}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t = \hat{f}(n) \end{aligned}$$

Enfin, comme F est $\mathcal{C}^1$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et F est somme de sa série de Fourier.
On a donc $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$
Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi xn}$ ■

Application : $\forall s > 0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{k^2}{s}}$

Démonstration : Soit $\alpha > 0$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ qui vérifie les hypothèses du théorème.
On calcule, si $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-2\pi i t n} dt$

$$\begin{aligned} &\overset{(u=\sqrt{\alpha}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2\pi i n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(u+\frac{i\pi n}{\sqrt{\alpha}})^2} e^{\frac{-\pi^2 n^2}{\alpha}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{-\pi^2 n^2}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{-\pi^2 n^2}{\alpha}} \end{aligned}$$

On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on prend $\alpha = \frac{\pi}{s}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{k^2}{s}}$ ■

1. on peut inverser car la série converge normalement.

Développement: Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible

Justine VELLY
Joséphine BOULANGER

12 septembre 2016

Référence : Gourdon analyse, page 252

Théorème 1 (***Théorème d'Abel***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence[1] ≥ 1 *telle que* $\sum a_n$ *converge.*
On note f la somme de cette série entière sur le disque unité (ie $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$).
On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z < 1 \;\; et \;\; \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

Alors on a :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Preuve du Théorème 1 :

Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour majorer $f(z) - S$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n.

1. redondant avec la suite

Soit $z \in \mathbb{C}, z < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_N &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} R_n(z^n - 1)}_{=0 \text{ pour } n=0} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) \\ &= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)\end{aligned}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$ on en déduit

$$\underline{f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n} \qquad (\star)$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour tout $n > N$ (possible car la série converge).
D'après $(\star)$, on a pour tout $z \in \mathbb{C},\ z < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1||\sum_{n=0}^{N} R_n z^n| + \varepsilon|z-1|\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right) \leqslant |z-1|\left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}\underbrace{|z|^{N+1}}_{\leq 1}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $|\phi| \leqslant \theta_0$.
On a $|z|^2 = (1 - \rho e^{i\phi})(1 - \rho e^{-i\phi}) = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$.
Comme on fait tendre z vers 1, on peut prendre ρ aussi petit qu'on veut, par exemple : $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$.
On a alors la majoration [2]

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho\cos(\phi) - \rho^2}(1+|z|) \\ &\leqslant \frac{2}{2\cos(\phi) - \rho} \\ &\leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}\end{aligned}$$

Choisissons maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha\left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) < \varepsilon$.
D'après tout ce qui précède on a, $\forall z \in \Delta_{\theta_0},\ |z-1| \leqslant \min(\alpha, \cos(\theta_0))$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1|\frac{\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon\frac{2}{\cos(\theta_0)} \leqslant \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

■

2. en utilisant le fait que cos est décroissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse.
Par exemple, on a $\lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ et pourtant $\sum(-1)^n$ diverge.
Cependant, le théorème suivant donne une réciproque affaiblie si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 2 (*Théorème Taubérien faible - 1897*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C}, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\|x|<1}} f(x) = S.$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Preuve du Théorème 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\quad S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{(1-x^k)}_{>0} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

De plus,

- pour $x \in]0,1[$, $(1-x^k) = (1-x)\underbrace{(1+x+\cdots+x^{k-1})}_{\leqslant k\times 1} \leqslant k(1-x)$
- lorsque $k \geqslant n+1$, $\frac{k}{n} \geqslant 1$, et donc $|a_k| \leqslant \frac{k}{n}|a_k|$

Donc :

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leqslant (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

où M désigne un majorant de la suite $(k|a_k|)$ [3].
Fixons maintenant $\varepsilon \in]0,1[$. Par ce qui précède on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})| \leqslant M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}$$

donc si N_0 est choisi tel que $\sup_{k>N_0} k|a_k| < \varepsilon^2$ (on peut car $k|a_k| \to 0$), on en déduit

$$\forall n \geqslant N_0, \quad |S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})| \leqslant (M+1)\varepsilon$$

Or $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S$ donc il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|f(1-\frac{\varepsilon}{n}) - S| < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall n \geq N_1, \quad |S_n - S| \leqslant |S_n - f(1-\frac{\varepsilon}{n})| + |f(1-\frac{\varepsilon}{n}) - S| \leqslant (M+1)\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon$$

ie $S_n \to S$ ■

3. Elle est bien majorée car tend vers 0 par hypothèse car $na_n \to 0$ donc $n|a_n| \to 0$