241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : X ens. non vide qcq et $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dim finie et complet.

I - Convergence

(A) Suite de fonctions

Déf ① : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $X \to E$ et $f : X \to E$. $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Ex ② : $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$

Déf ③ : $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ (CVU)

Prop ④ : Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur X, f_n converge simplement vers f.

C-E ⑤ : $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Prop ⑥ : $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur X ssi il existe une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n(x_n) - f(x_n)) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Ex ⑦ : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$ ne converge pas uniformément ($x_n = \pi/2n$)

Prop ⑧ : (Critère de Cauchy uniforme) :
$(f_n)_n$ CVU sur X ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \forall p \geq N, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$.
Réciproque vraie car E complet

Appli ⑨ : La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynôme est une fonction polynôme.

Déf ⑩ : $\mathcal{B}(X,E) :=$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E. $f \in \mathcal{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty := \sup_x \|f(x)\|$.

Prop ⑪ $(f_n)_n \in \mathcal{B}(X,E)^{\mathbb{N}}$ CVU vers $f \in \mathcal{B}(X,E)$ sur X ssi $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ ie $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

C-E ⑫ : $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \min(1/x, n)$. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$. $f_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $f \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

Théo : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Si f est continue, elle est limite uniforme de polynômes.

(B) Séries de fonctions

Déf ⑬ : On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$ la suite $(S_n)_n$ où $S_n : X \to E$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

Déf ⑭ : Si $(S_n)_n$ converge simplement sur X, la fonction limite S de $(S_n)_n$ s'appelle somme de $\sum f_n$.

Déf ⑮ : On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$ la fonction $R_n : x \in X \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

Ex ⑯ : Sur $\mathbb{R}^+$, $(\sum_{n=0}^{N} x e^{-nx})_N$ CVS vers $\begin{cases} x/(1-e^{-x}) & x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Déf ⑰ : $\sum f_n$ CVU sur X si $(S_n)_n$ CVU sur X.

Prop ⑱ : Si $\sum f_n$ CVU sur X alors $(f_n)_n$ CVU vers 0.

CE ⑲ : $f_n(x) = 1/nx \xrightarrow{CVU} 0$ sur $]1, +\infty[$

Prop ⑳ : Soit $\sum f_n$ série simplement convergente. alors $\sum f_n$ CVU sur X ssi $(R_n)_n$ CVU vers 0 sur X.

C-E ㉑ : $\sum_{n\geq 0} x e^{-nx}$ CVS mais pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Prop ㉒ : Critère de Cauchy uniforme : $\sum f_n$ CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \forall x \in X, \|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\| \leq \varepsilon$.

Déf ㉓ : $\sum f_n$ cvge absolument sur X si $\forall x \in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ cvge.

Prop ㉔ : $\sum f_n$ CVA vers $f \Rightarrow \sum f_n$ CVS vers f

C-E ㉕ : $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas absolument.

Déf ㉖ : $\sum f_n$ cvge normalement sur X si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$ et $\sum \|f_n\|_\infty$ cvge.

Ex ㉗ : $\sum x e^{-nx}$ normalement cvgte sur $[a, +\infty[$ $a > 0$

Théo ㉘ : Si $\sum f_n$ cvge normalement sur X, alors elle converge absolument et uniformément sur X et $\|\sum_{n\geq 0} f_n\|_\infty \leq \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$

C-E ㉙ : sur $[0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[\cup]\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$
$\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$ mais pas normalement

C) Limite et continuité

Théo 30 : X partie d'un evn. $(f_n)_n$: applications uniformément convergente continues de $X \to E$. Alors f est continue.

Ex 31 : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^n$ ne cvge pas uniformém^t

Théo 32 (Double limite) : Soit $f_n : X \to E$ CVU vers f. Soit $a \in \overline{X}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim_{x \to a} (f_n(x))$ existe.
Alors, $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) . < +\infty$.

Contre-Ex 33 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x/n)$.

Remarque 34 : En appliquant ces théorèmes aux sommes partielles $(S_n)_n$, on retrouve les mêmes résultats pour les séries de fonctions.

Ex 35 : $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II - Dérivation et intégration

A) Dérivabilité

Thm 36 : Soit (f_n) une suite d'application $\mathcal{C}^1$ de $[a;b]$ dans E.
Si $\exists x_0 \in [a;b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ CV, et si $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur $[a;b]$ vers g, alors (f_n) CVU sur $[a;b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1$. De plus, $f' = g$.

Thm 37 : Soit (f_n) suite de fonctions dérivables de I dans E.
Si $\exists a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ CV et si $\sum f_n'$ CVU sur I, alors $\sum f_n$ CV simplement sur I, uniformément sur tout segment contenu dans I, et S est dérivable, avec $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$

C-ex (36 bis) : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$ CV vers $f(x) = |x|$ pas dérivable en 0, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty$.

Ex 38 : $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ sur $]1;+\infty[$, on a $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]1;+\infty[)$

Ex 39 : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

B) Convergence dans un espace mesuré

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Déf 40 : Soit N un ensemble mesurable tq $\mu(N) = 0$
$f_n \to f$ μ-pp si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X \setminus N$.

Déf 41 : Soit $p \in [1;+\infty[$. On définit $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ pour tout $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$. f_n CV dans L^p vers f si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ex 42 : Exemple de convergence L^p non μ-pp.
Dans $([0;1] ; \mathcal{B}([0;1]), \lambda)$, avec λ mesure de Lebesgue, on pose $\forall n \geq 0$ et $k \in \{0; \dots; 2^n - 1\}$ $\quad f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n} ; \frac{k+1}{2^n}\right[}$
$(f_n)_n$ CV dans L^p mais pas μ-pp.

C) Interversion limite et intégrale ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré)

Thm 43 (Beppo Levi) : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est mesurable et
$\int_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}^+$

Thm 44 (Lemme de Fatou) : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables positives, alors $0 \leq \int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu \leq \infty$

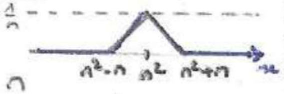
Appli 45 : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et tq $\sup_n \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$, alors $f \in L^1(\mu)$.

Prop 46 (Convergence L^p dominée) : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^p_{\mathbb{R}}(\mu))^{\mathbb{N}}$ CV μ-pp vers f
1) si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, alors $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$
2) s'il existe $g \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ tq $|f_n| \leq g$ μ-pp $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$

Convergence uniforme et compacité

Thm 47 : Soit $(f_n)_n$ CVU de fonctions intégrables sur le compact $[a;b]$ à valeurs dans E. Alors $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \, dx$

C-ex 48 : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par :



$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n^2 - n < x \leq n^2 \\ -\frac{x}{n^2} + 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n^2 < x < n^2 + n \\ 0 & \text{si } x < n^2 - n \text{ ou } x > n^2 + n \end{cases}$$

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(t) \, dt$

Thm 49 Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions intégrables CV simplement vers f sur $[a;b]$. Si les fonctions f_n sont bornées par un même nombre k et si $(f_n)_n$ CVU vers f sur tout compact $\subset]a;b[$, alors f est intégrable sur $[a;b]$ et on a $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$.

Ex 50 : $f_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $[0;\pi/2]$; on a $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx = 0$.

Thm 51 : Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et (f_n) suite de $]a;b[$ dans E. Si (f_n) CVU sur tout segment de $]a;b[$ vers f ; si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b f_n(x) \, dx$ CV ;

$\mathcal{C}_m$: continue par morceaux

Si $\exists \varphi :]a;b[\to \mathbb{R}^+$ tq $\int_a^b \varphi(x)dx$ CV et tq $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in]a;b[$, $\|f_n(x)\| \le \varphi(x)$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est CV et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Thm 52 : Soit $]a;b[\subset\mathbb{R}$ $(-\infty\le a<b\le+\infty)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $]a;b[\to\mathbb{R}$. Si $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n\in\mathcal{C}_m(]a;b[)$; si $(f_n)_n$ CV simplement sur $]a;b[$ vers f ; si $f\in\mathcal{C}_m(]a;b[)$ et s'$\exists \varphi :]a;b[\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}_m$, positive, tq $\int_a^b\varphi(x)dx$ CV et $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n|\le\varphi$; alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int_a^b f_n(x)dx$ CV ; $\int_a^b f(x)dx$ CV et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx.$$

Ex 53 : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{x^{2n}+1}dx = 0$

D) Interversion somme et intégrale

Thm 54 : Soit $f_n :]a;b[\to E$ intégrable. Si $\sum f_n$ CVU sur $[a;b]$. Alors $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[a;b]$, $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est CV et on a $\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$

Ex 55 : $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

Thm 56 : Soit $(f_n)_{n\ge0}$ suite de fonctions $\mathcal{C}_m(I)$, I intervalle qcq, tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I|f_n(x)|dx<\infty$. Si $\sum f_n$ CV simplement sur I ; si $S\in\mathcal{C}_m(I)$; si $\sum\int_I f_n(x)dx$ CV absolument, alors $\int_I|S(x)|dx<\infty$ et

$$\int_I S(x)dx=\sum_{n=0}^\infty\int_I f_n(x)dx$$

Ex 57 : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x-1}dx = \sum_{n\ge1}\frac{1}{1+n^2}$

III Séries particulières

A) Séries entières

Déf 58 : On appelle série entière complexe de variable complexe une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Prop 59 : Si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée avec $z_0\in\mathbb{C}$, alors $\forall z\in\mathbb{C}$ tq $0\le|z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument. (Abel)

Déf 60 : Le nombre $R=\sup\{r>0, (|a_n|r^n) \text{ soit borné}\}$ s'appelle le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ (RC)

Rque 61 : l'ensemble $\{z\in\mathbb{C}, |z|=R\}$ est appelé cercle d'incertitude.

Thm 62 : **(Abel angulaire)** Soit $\sum a_n z^n$ série entière de RC ≥ 1 tq $\sum a_n$ CV. Soit f la somme de cette série sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0\in[0;\pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}, |z|<1 \text{ et } \exists\rho>0, \exists\theta\in]-\theta_0;\theta_0[, z=1-\rho e^{i\theta}\}$ DVP

alors $\lim_{\substack{z\to1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n$

Thm 63 : **(Taubérien faible)**. Avec les mêmes notations, on suppose qu'$\exists S\in\mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x)=S$. Si $a_n=o(\frac1n)$, alors $\sum a_n$ CV vers S.

B) Séries de Fourier

Déf 64 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\mathcal{C}_m$ et 2π-périodique ($\mathcal{C}_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$). On appelle coefficients de Fourier de f : ($n\in\mathbb{Z}$) (coefficients exponentiels)

$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt$

$a_n(f)=\frac1\pi\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)dt$; $b_n(f)=\frac1\pi\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)dt$ (coefficients trigonométriques)

Déf 65 : On appelle série de Fourier de f la série

$S(f)(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{int}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)$

Prop 66 : (Riemann-Lebesgue) : $c_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Thm 67 : (Parseval) : Soit $f\in\mathcal{C}_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$; alors $\sum|c_n(f)|^2$, $\sum|a_n(f)|^2$, $\sum|b_n(f)|^2$ convergent et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=\frac{|a_0(f)|^2}{4}+\frac12\sum_{n=1}^\infty\left(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$$

Thm 68 : (Dirichlet). Soit $f\in\mathcal{C}_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $\tilde f$ sur $\mathbb{R}$, où $\tilde f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$

Thm 69 : Soit $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f.

Appli 70 : $\sum\frac1{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Appli 71 : **(Formule sommatoire de Poisson)** : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ tq $f, f' \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat f(n)e^{2i\pi nx}$, avec $\hat f(n)=\int_\mathbb{R}f(t)e^{-2i\pi nt}dt$.

Coro 71 : $\forall s>0$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 s}=\frac1{\sqrt s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$ DVP

Références:

- Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- Analyse, Gourdon (DVP 1 et 2)
- Analyse pour l'agrégation, Zuily & Queffélec
- Théorie de l'intégration, Briane & Pagès
- Les contre-ex en maths, Hauchecorne