241

Suites et séries de fonctions. Escemples et contre-escemples

I- Convergence et régularité

Soit (X,d) un espace métrique, $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn de dimension finie. On considère les fonctions de X dans E.

1) Convergence simple

Def 1 : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si $\forall x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Esc 2 : la série $\sum f_n$ avec $f_n : z \mapsto z^n$ converge simplement vers $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ sur le disque unité.

Rem 3 : la convergence simple ne conserve pas la continuité : $\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \cos(m!\pi x)^{2n} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

2) Convergence uniforme

Def 4 : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty = 0$.

Prop 5 : l'ensemble $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Prop 6 : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

C-Esc 7 : $f_n : x \mapsto \frac{1}{1-(x-n)^2}$ converge simplement mais pas uniformément.

Def 8 : on dit que la série $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Prop 9 : si $\sum f_n$ converge normalement, $\sum f_n$ converge uniformément

C-esc 10 : si $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément mais pas normalement.

Thm 11 : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, et si f_n est continue en $x_0 \in X$, alors f est continue en x_0.

Thm 12 (Double limite) : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, et si f_n admet une limite en $a \in \overline{X}$, alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f(x).$$

Thm 13 : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}^1([a,b])$ et vérifie
- $\exists x_0 \in [a,b]$, $(f_n(x_0))$ converge
- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Thm 14 (Théorème de Weierstrass) : toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales

3) Application à l'étude des séries entières

Def 15 : on appelle série entière, noté $\sum a_n z^n$, toute série de fonctions complexes $\sum f_n$ avec $f_n : z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Prop 16 (lemme d'Abel) : soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout $r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

Def 17 : on définit le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Esc 18 :
- $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infinie.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \alpha^n z^n$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{\alpha}$.
- $\sum n! z^n$ a un rayon de convergence nul.

Prop 19 : soit $D = D(0,R)$ le disque ouvert de convergence, la série entière est divergente sur $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$, normalement convergente sur tout compact de D, et on ne peut donner de résultat général pour le cercle d'incertitude ∂D.

Scanned by CamScanner

Ex 20 : $\sum \frac{z^n}{n^k}$ diverge en tout point de ∂D si $k=0$, converge en tout point de ∂D si $k=2$, et diverge en 1, converge en -1 si $k=1$.

Prop 21 : la série dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. La somme S d'une série entière est de classe C^∞ sur D et $S^{(n)}(0)=a_n n!$

II- Convergences dans les espaces de fonctions L^p

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

1) Convergence presque partout

Def 22 : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f si il existe un ensemble négligeable N tel que $\forall x\in X\setminus N$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$

Prop 23 : la limite presque partout de fonctions mesurables est mesurable.

Thm 24 (Beppo-Lévi) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles mesurables positives. Alors $\lim\limits_{n} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Application 25 (Fubini) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est intégrable et
$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n \, d\mu$$

Thm 26 (Fatou) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $0\leq \int_X \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n \, d\mu \leq +\infty$

Thm 27 (convergence dominée) : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que :

- Pour presque tout x de X, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$
- Il existe une fonction g intégrable telle que pour presque tout x, $|f_n(x)|\leq g(x)$

Alors f est intégrable et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$

2) Convergences L^p

Thm 28 (Riesz-Fischer) : $\forall p\in[1;+\infty[$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Thm 29 : $\forall p\in[1;+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p.

Application 30 : $\forall p\in[1;+\infty[$, $\mathcal{E}_c(\mathbb{R})$ est dense dans L^p.

3) Séries de Fourier

On note $L^1_{2\pi} = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid f$ est 2π-périodique et intégrable sur $[0;2\pi]\}$.

Def 31 : le n-ième coefficient de Fourier de $f\in L^1_{2\pi}$ est
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

Ex 32 : soit $\varepsilon\in]0;\pi]$ et σ_ε la fonction définie sur $]-\pi;\pi]$ par $\mathbb{1}_{[-\varepsilon;\varepsilon]}$ est étendue par 2π-périodicité (fonction signal). On a $c_0(\sigma_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi}$ et $\forall n\in\mathbb{Z}^*$, $c_n(\sigma_\varepsilon) = \frac{\sin(n\varepsilon)}{\pi n}$

Prop 33 (Riemann-Lebesgue) : $\forall f\in L^1_{2\pi}$, $c_n(f)\underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Def 34 : La série de Fourier de $f\in L^1_{2\pi}$ est $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$

Def 35 : On appelle noyau de Dirichlet d'ordre N la fonction
$$D_N : x\mapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Def 36 : On appelle noyau de Fejér d'ordre N la fonction
$$K_N : x\mapsto \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)^2}{N\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Rem 37 :
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $S_N(f)(x) = D_N * f(x)$
- Moyenne de Césaro : $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = K_N * f$

Thm 38 (Fejér) : si $f\in\mathcal{E}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\|K_N * f - f\|_\infty = 0$.

Coro 39 : si $f\in\mathcal{E}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et si sa série de Fourier converge, alors la somme coïncide avec f partout.

Ex 40 : soit $\varepsilon\in[0;\pi]$ et $\Delta_\varepsilon : x\mapsto \left(1-\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$ sur $[-\pi;\pi]$ étendue par 2π-périodicité (fonction triangle).

On a $\Delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\varepsilon)^2}{\pi\varepsilon n^2}\cos(nx)$

DVP1

C-ex 41 : il existe des fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas.

Théorème 42 (Dirichlet) : soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ tels que les limites $f(x_+) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$ et $f(x_-) = \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t)$ existent et que les fonctions $t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$, alors
$$(D_N * f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

Coro 43 : si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur tout compact.

III - Suites et séries de variables aléatoires

· Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1) Convergences aléatoires

Def 44 : (cf Annexe I)

(i) $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}) = 1$

(ii) $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$

(iii) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

(iv) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(X \in \delta A) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$

Thm 45 : les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(ii) $\forall f$ continue bornée, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}$ tq F_X est continue en t, $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t)$.

Thm 46 (Slutsky) : si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ une constante alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

Ex 47 : si $X_n \sim \mathcal{U}(\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\})$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}([0;1])$

Thm 48 : (i) si $X_n \xrightarrow{p.s} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(ii) si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(iii) si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

C-Ex 49 : soit $p \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(X_n = n^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.
Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais X_n ne converge pas dans L^p.

2) Théorèmes limites

Thm 50 (TCL) : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid d'espérance finie μ et de variance finie σ^2
Alors $\frac{\sum_{n=1}^{N}(X_n - m)}{\sqrt{N\sigma^2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Ex 51 : si $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Thm 52 (Loi des grands nombres) : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid d'espérance finie, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1)$

3) Application à l'étude des chaînes de Markov

Def 53 : une chaîne de Markov homogène dans un espace d'états E au plus dénombrable est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur E telle que $\forall (x_0, \dots, x_{n+1})$ avec $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \neq 0$, on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1}$$

Prop 54 : une chaîne de Markov est caractérisée par sa matrice de transition $P = (p_{x,y})_{x,y\in E}$ et sa loi initiale μ_0 de X_0

Def 55 : une chaîne de Markov est irréductible si $\forall x, y \in E^2$, $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tels que $p^{(r)}_{x,y} > 0$ et $p^{(s)}_{y,x} > 0$.

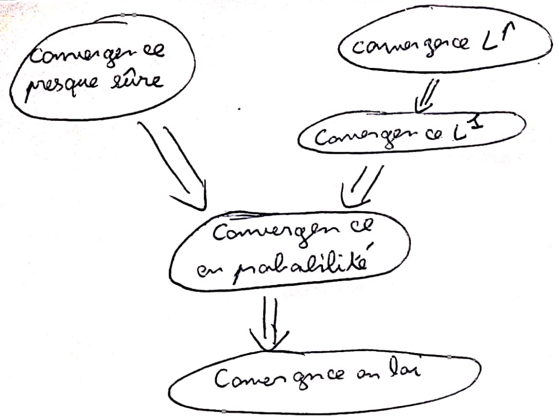
Def 56 : soit $N_y = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}$ le nombre de passage en y.
On dit que l'état y est récurrent si $\mathbb{P}_y(N_y = +\infty) = 1$, et transitoire sinon.

Prop 57 : l'état y est récurrent si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = y)$ diverge. L'état y est transitoire si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = y)$ converge.

Application 58 (Théorème de Pólya) : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d \leq 2$, et transitoire si $d \geq 3$.

Scanned by CamScanner

Annexe I : Convergences en probabilité



Scanned by CamScanner