242 : Utilisation en probabilités de la transformée de Laplace et de Fourier et du produit de convolution

<u>Cadre</u> : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé
$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ variables aléatoires (va)

I Problème de la caractérisation des lois

<u>Motivations</u> : Les transformées de Laplace et de Fourier sont 2 outils permettant la caractérisation des lois ainsi que (sous certaines conditions) le calcul des moments.

① Théorème des classes monotones fonctionnelles

<u>déf1</u> : Un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ est dit <u>monotone</u> s'il contient les constantes et est stable par convergence monotone bornée. [BL]

<u>THM</u> [des classes monotones fonctionnelles] Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de fonctions réelles bornées sur Ω, stable par multiplication et contenant les constantes. Tout ev monotone contenant $\mathcal{C}$ contient les f° bornées $\sigma(\mathcal{C})$-mesurables. [BL]

② Fonction caractéristique

<u>déf2</u> La <u>fonction caractéristique</u> de X, ou transformée de Fourier, notée φ_X, est la fonction : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\boxed{\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle})}$. [BL] 62

<u>Cas d'une va à densité</u> f : $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle} f(x)\,dx$.

<u>Exemples</u> : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\varphi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$; $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$
$X \sim \mathcal{E}(1)$, $\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - it}$ [OV]

<u>THM</u> [Injectivité] On note $\mathbb{P}^X$ (resp. $\mathbb{P}^Y$) la loi de X (resp. Y).
Si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$. [BL] 62

<u>Propo3</u> X va réelle.
(i) Si $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ alors φ_X est n fois dérivable et : $\forall k \leqslant n$, $\boxed{\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})}$. Notamment : $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$.
(ii) Réciproquement, si n est pair et si φ est n fois dérivable alors X admet tout moment d'ordre $\leqslant n$. [BL] 64

App : X réelle. Si X est bornée alors φ_X est analytique et $\mathbb{P}_X$ est caractérisée par ses moments.

③ Transformée de Laplace [BL] p 66

<u>déf4</u> La <u>transformée de Laplace</u> (ou <u>fonction génératrice des moments</u>) est la fonction $\boxed{L^X : s \mapsto \mathbb{E}(e^{\langle s, X\rangle})}$ définie pour les s tels que $e^{\langle s, X\rangle}$ est intégrable.

⚠ L^X n'est pas définie partout ! Il se peut même que son domaine de déf° soit $\{0\}$: si $X : \Omega \to \mathbb{Z}^*$ avec $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n) = \frac{1}{n^2}$

<u>Exemples</u> $X \sim \Gamma(a, \lambda)$: $L^X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$
$X \sim \mathcal{B}(n,p)$: $L^X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$

<u>THM</u> [Injectivité] Si L^X est définie sur un voisinage de 0, alors elle caractérise la loi.

<u>Propo5</u> X va réelle telle que L^X soit définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Alors L^X est analytique sur un voisinage $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de 0 ($\varepsilon > 0$) et $\boxed{L^X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)}$.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L^{X(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$.

<u>Propo6</u> : X v.a. réelle. Alors $\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \inf_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$
$t \in \mathbb{R}$

④ Moments et lois

<u>Contre-exemple</u> $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z = e^X$ est de densité $f_Z(x) = \frac{\exp(-(\ln x)^2/2)}{\sqrt{2\pi}\, x} \mathbb{1}_{x>0}$; Z_a de densité $f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi \ln x))\mathbb{1}_{x>0}$, $a \in [-1,1]$ <u>Alors</u> Z_a et Z ont mêmes moments. (BL) p 66

[BI] THM 6 [des moments] Soit μ une proba sur $\mathbb{R}$ dont les moments $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx)$ sont finis, $\forall k$. Si la série $\sum_{k \geq 0} \alpha_k \frac{\lambda^k}{k!}$ a un rayon de convergence > 0, alors μ est unique.

II Produit de convolution et indépendance des v.a.

→ les outils définis ci-dessus vont simplifier les calculs.

1) Produit de convolution

[OU] déf 7: Soient μ et ν deux probas sur $\mathbb{R}^d$. Le produit de convolution de μ et ν, noté $\mu * \nu$ est la proba sur $\mathbb{R}^d$ définie par:

$$\mu * \nu (B) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x+y)\mu(dx)\nu(dy) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

[BL] 63 THM [Formule d'inversion de Fourier] Si φ_X est Lebesgue-intégrable, alors la loi de X admet une densité continue bornée f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d, \ f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\varphi_X(t)\,dt}$$

[BL] Exemples: • loi de Laplace de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $\to \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$; • loi de Cauchy densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \to \varphi(t) = e^{-|t|}$

2) Somme de variables aléatoires indépendantes

Propo 8: Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

[OU] 63 Cas de v.a. à densité f_X, f_Y: $X+Y$ admet une densité f_{X+Y} définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\boxed{f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_X(y) f_Y(x-y)\,dy}$

Cor 8 Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\boxed{\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)}$

Rmq: de même $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow L^{X+Y} = L^X L^Y$.

⚠ Ceci ne caractérise pas l'indépendance: (X,Y) de densité $f(x,y) = 2\mathbb{1}_E(x,y)$ vérifie $L^{X+Y} = L^X L^Y$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$ (cf annexe)

[BL] Exemples • $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$: $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$.
• $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(m, \mu^2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$: $X+Y \sim \mathcal{N}(m+m, \sigma^2+\mu^2)$

[EL] 183 App 10 [THM de Polya] La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d=1$ ou 2 et transiente pour $d \geq 3$.

déf 11: • μ proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est indéfiniment divisible (I.D) si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists Q_n$ proba sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu = Q_n^{*n}$. [CO] 136.

• X v.a réelle est indéfiniment divisible si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists n$ var $\perp\!\!\!\perp$ $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ telles que $X \sim X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$

déf équiv: X I.D. ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ φ_X est la puissance n-ième d'une fonction caractéristique.

Propo 13 Si X est I.D. alors φ_X ne s'annule pas.

Exemples • la normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ • loi gamma $\Gamma(a, \lambda)$
• loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ • loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$.

Contre-exemple: loi uniforme.

3) Caractérisation de l'indépendance et v.a. gaussiennes.

Propo 14 [Caractérisation] $Z = (X,Y)$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\boxed{\varphi_Z(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)}$. [OU] 205

Rmq: On a une caractérisation analogue avec la transformée de Laplace.

App 15 X, Y v.a réelles bornées. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$ $E[X^k Y^l] = E(X^k)E(Y^l)$. [OU] 220

App 16 $X = (X_1, \dots, X_d)$ vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$. Si $\mathrm{Cov}(X)$ est diagonale alors la famille $(X_1, \dots, X_d)$ est mutuellement indép.

Contre-exemple $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, ε à valeurs dans $\{\pm 1\}$ de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ [BL] 106
$X \perp\!\!\!\perp \varepsilon$; $\varepsilon X \sim X$ mais $(X, \varepsilon X)$ non gaussien

THM [de Bernstein] X, Y v.a réelles telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X+Y \perp\!\!\!\perp X-Y$. Alors X et Y sont gaussiennes. [OU] 280

III Comportement asymptotique

1 Convergences et théorème de Lévy

Cadre $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ espace probabilisé. $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}^d$ v.a.

[OU] 298 déf 17 : Une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures bornées converge étroitement vers la mesure μ, noté $\mu_n \Rightarrow \mu$, si $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu}$

[OU] 307 Exemple : $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{j/n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\mu_n \Rightarrow \mathbb{1}_{[0,1]}\times\lambda$.

[OU] 313 déf 18 : La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si la suite $(\mathbb{P}_n^{X_n})$ des lois de X^n converge étroitement vers la loi P_X de X.

[BL] 122 Propo 19 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $F^{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F^X(t)$ en tout point de continuité t de F^X (où F^Y désigne la fonction de répartition d'une v.a Y)

[BL] App 20 X_n, X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X=k)$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

[OU] 313 THM [de Lévy]
a) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors la suite $(\varphi_{X_n})_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ vers φ_X.
b) Si $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ continue en 0, alors φ est la transformée de Fourier d'une proba μ sur $\mathbb{R}^d$ et (X_n) converge en loi vers μ. De plus, $\exists X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
(ADMIS)

Rque : On a un prop analogue avec L^X lorsqu'elle est définie au voisinage de 0

2 Applications

THM [Loi faible des grands nombres] X v.a. réelle. Si $E(|X|) < \infty$ alors $\frac{S_n}{n}$ converge en proba vers $E(X)$. [BL] 132

THM [des événements rares de Poisson]
Soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\{A_{nj}\}_{1\le j\le M_n}$ famille finie d'événements indépendants sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{nj}) = p_{nj}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{nk}}$. Si $M_n \nearrow +\infty$, que $\max_{1\le j\le M_n} p_{nj} \to 0$ et que $\sum_{j=1}^{M_n} p_{nj} \to \lambda > 0$, alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. [OU] 321

App 21 : si $M_n = n$, $p_{nj} = p_n$ où $(p_n)_n$ vérifie $np_n \to \lambda > 0$.
$S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

THM [Central limite] Si $E(X^2) < \infty$ alors $\frac{S_n - nEX}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$. [BL] 136

App 22 construction d'intervalles de confiance asymptotiques.

déf 23 Une famille de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ Φ est tendue si $\forall\varepsilon>0$, $\exists K \subset\subset \mathbb{R}$, $\forall Q \in \Phi$, $Q(K) \geq 1-\varepsilon$

THM [Prohorov] Φ famille de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tendue. Alors de toute suite $(Q_n)_n \subset \Phi$, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers une proba Q. [CO] exo 4.8

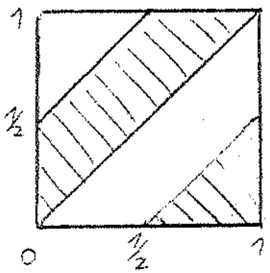
THM 24 Si la loi de X est déterminée par ses moments et que $\forall n\in\mathbb{N}$, X_n admet des moments à tout ordre avec $\lim_{n\to\infty} E(X_n^k) = E(X^k)$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. [BL]

THM [Lois I.D.] On suppose $\forall n\in\mathbb{N}$, X_n I.D. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors X ID. De plus, les seules lois possibles pour des sommes $S_n = X_{1n} + \dots X_{n,n}$ où les $X_{k,n}$ sont iid à n fixé sont les lois I.D. [CO] 139

Annexe :

- contre-exemple : $L^{X+Y} = L^X L^Y$ ne caractérise pas l'indépendance

E est la partie hachurée de $[0,1] \times [0,1]$ ci-dessous.



Références

- Probabilités, Barbe-Ledoux [BL]
- Probabilités 2, Ouvrard [Ou]
- Calcul des probabilités, Foata-Fuchs [FF]
- Exercices de probabilités, Cottrell et associés [Co]
- Probability and Measure, Billingsley [Bi]

Développements possibles

- formule d'inversion de Fourier
- thm de Polya
- thm de Bernstein
- thm de Poisson des évènements rares
- thm Central limite
- Thm sur les lois ID