243

Série entières, convergence, propriétés de la somme. exemples et applications.

I) Généralités.

1) propriétés

déf: Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et (a_n) une suite complexe.

prop: (le lemme d'Abel.)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un point de $\mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors:

(i) $\forall z \in D(0,|z_0|)=\{z\in\mathbb{C}, |z|<|z_0|\}$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) $\forall r \in]0,|z_0|[$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\bar{D}(0,r)=\{z\in\mathbb{C}, |z|\le r\}$.

déf: Le lemme d'Abel justifie la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ comme étant:

$$R=\sup\{r\in\mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n) \text{ soit bornée}\}\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}.$$

l'ensemble $D(0,R)$ est appelé disque ouvert de convergence.

2) détermination du rayon de convergence.

proposition: (la règle de d'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ alors $R=\frac{1}{r}$

prop: la formule de Cauchy-Hadamard

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence est égale à $\boxed{\dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}}}$.

exemples:

les séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$; $\sum z^n$; $\sum$ [illegible] ; $\sum \mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ ont respectivement pour rayon de convergence l'infini, 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) opérations sur les séries entières

prop: Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum(\lambda a_n)z^n$ ont même rayon de convergence.

prop: Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b alors la série entière $\sum(a_n+b_n)z^n$ a un rayon de convergence R_s vérifiant $R_s\ge\min(R_a,R_b)$ et $\sum p_n z^n = (\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$, $p_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ a un rayon de convergence R_p vérifiant $R_p\ge\min(R_a,R_b)$.

II) propriétés de la somme

Dans cette section on considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et les applications $s: D(0,R)\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$

$f:]-R,R[\to\mathbb{C}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$

1) continuité

th: l'application s est continue

application: le principe des zéros isolés
si il existe une suite (α_n) de complexes non nuls convergents vers 0 tels que $s(\alpha_n) = 0$ pour tout n alors, $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Dérivabilité par rapport à la variable réelle.

th: Soit $p \in \mathbb{N}$, alors le rayon de convergence de la série dérivée d'ordre p, à savoir $\sum (n+1)\dots(n+p)a_{n+p} z^n$ est aussi égal à R.
de plus $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[, \mathbb{C})$ avec $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[$

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+p)\, a_{n+p} x^n$$

enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

application: résolution d'équation différentielle.

exercice: (théorème de Bernstein sur les séries entières)
Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$
alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.
[Dev 1].

3) Intégrabilité

th: si $[\alpha,\beta] \subset]-R,R[$ alors f intégrable sur $[\alpha,\beta]$
avec $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$

4) Analycité

th: Soit $z_0 \in D(0,R)$, alors il existe $r \in [R-|z_0|, +\infty[$ et une suite complexe (α_n) telle que

$$s(z_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n u^n \quad \text{pour tout } u \text{ dans } D(0,r)$$

autrement dit, l'application s est analytique sur $D(0,R)$.

th: la formule de Cauchy
$\forall r \in]0,R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} s(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

application: théorème de Liouville
si $R = +\infty$ et si s est bornée sur $\mathbb{C}$ alors s est constante.

th: égalité de Parseval
Pour tout $r \in]0,R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s(re^{i\theta})|^2\,d\theta$$

application: si $R \geq 1$, si s est bornée sur $D(0,1)$ et si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$ alors s est une fonction polynôme.

III) Etude du comportement au bord du disque

1) autour du théorème d'Abel

<u>th</u>: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. Notons $f(z)$ la somme de cette série sur $D(0,R)$ et

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho \in]0, \cos\theta_0], \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, où $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

<u>application</u>: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$;

$\forall t \in]0, 2\pi[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$

<u>th</u>: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et $f(z)$ la somme de cette série sur $D(0,1)$. on suppose l'existence d'un complexe S tel que $\lim\limits_{x \to 1, x<1} f(x) = S$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$.

Alors la serie $\sum a_n$ converge, sa somme étant égale à S.

2) Un théorème de comparaison.

<u>th</u>: Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ et que la série $\sum b_n$ est divergente.

On note pour $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k$ et $B_p = \sum\limits_{k=0}^{p} b_k$

S'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = l$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to 1, x<1}{\sim} l \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

<u>application</u>:

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geq 2$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{\alpha^n} \underset{x \to 1, x<1}{\sim} -\frac{\log(1-x)}{\log \alpha}$

IV) un exemple de problème résoluble par les séries entières.

<u>exercice</u>: Soient $a_1, \dots, a_k$ des entiers non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. pour $n \geq 1$ on note u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \dots x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n$.

On veut un équivalent de u_n en $+\infty$.

(dev 2).

Références:

- Préparation à l'oral de l'agrégation, leçon d'analyse
  auteur: Madère, ed: Ellipses
- Gourdon, analyse
- Zuilly, Queffélec
- oraux X-ens, analyse 2