243 Convergence des séries entières. Propriétés de la somme. Exemples et Applications

I - Généralités

Déf 1: On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z \in \mathbb{C}$

Rq: On verra que l'on peut définir les séries entières matricielles

Pb: Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ une telle série est-elle convergente ?

1) Définitions et premières propriétés

Prop 2: [Lemme d'Abel] Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(|a_n||z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ soit bornée, alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série est absolument convergente

(ii) $\forall r$, $0 < r < |z_0|$, la série converge normalement pour $|z| \leq r$

Rq: Il y a donc convergence normale sur tout compact contenu dans le disque de convergence

Déf 3: Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière le nombre $R_A = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est appelé le rayon de convergence de la série entière A.

Cor 4: D'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_A$ et diverge pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R_A$.

Déf 5: $D_A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_A\}$ est appelé disque ouvert de convergence de la série entière A et $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_A\}$ est appelé cercle de convergence ou bord de D_A.

Rq: On ne peut a priori rien dire sur le comportement de la série sur le cercle de convergence.

2) Calcul du rayon de convergence

Prop 6: [Règle d'Alembert] Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ avec $|a_n| > 0$ à partir d'un certain rang et $\lambda \in [0, +\infty]$ alors $R_A = \frac{1}{\lambda}$

Par convention, $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

exemple 7: • $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} = 0 \Rightarrow R = +\infty$

• $\sum n^\alpha z^n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1 \Rightarrow R = 1$.

Prop 8: [Règle de Cauchy] Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$ alors $R_A = 1/\lambda$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/{+\infty} = 0$).

exemple 9: • $(1+z)^m = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!\,n!} z^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^n$ $a_n = \begin{cases} \binom{m}{n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0 \Rightarrow R = +\infty$.

• $\sum \left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$; $|a_n|^{1/n} = \left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha-1}} = \exp\left(n^{\alpha-1} \ln\left(\frac{e^{1/n} + e^{-1/n}}{2}\right)\right)$

$= \exp\left(\frac{1}{2} n^{\alpha-3} + o(n^{\alpha-3})\right)$

$\Rightarrow R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{si } \alpha = 3 \\ 0 & \text{si } \alpha > 3 \end{cases}$.

/!\ On ne peut pas toujours appliquer l'une ou l'autre de ces règles ! Il faut que la limite existe.

exemple 10: • $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$; $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ n'existe pas et on n'a pas $|a_n| > 0$ à partir d'un certain rang !

Prop 11: [Formule d'Hadamard] Pour toute série entière, $R_A = 1/\lambda$ où $\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/{+\infty} = 0$)

Rq: Si $(|a_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, la formule d'Hadamard et la règle de Cauchy coïncident !

3) Opérations sur les séries

Dans toute la suite, $A = \sum a_n z^n$, $B = \sum b_n z^n$, $C = \sum c_n z^n$ et R_A, R_B, R_C dénotent leurs rayons de convergence respectifs.

Déf-Prop 12: Si $C = A + B$, $c_n = a_n + b_n$ et $R_C \geq \min(R_A, R_B)$

Déf-Prop 13: Si $C = A \cdot B$, le produit de Cauchy de A et B alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $R_C \geq \min(R_A, R_B)$.

exemple 14: • $A = \sum \frac{2}{n^2} z^n$ $B = \sum \frac{3}{n^3} z^n$ $A + B = \sum \frac{2n+3}{n^3} z^n$

$R_A = R_B = R_{A+B} = 1$.

• $A = \sum z^n$ $B = \sum \frac{1}{2^n} z^n$ $A \cdot B = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) z^n$

$= \sum_{n\geq 0} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) z^n$

$R_A = 1$; $R_B = 2$; $R_{A\cdot B} = 1$

Rq: le rayon de convergence du produit de Cauchy et de la somme peuvent-être strictement plus grand que chacun des rayons de convergence.

exemple 15 : • $A=\sum z^n$; $B=\sum -z^n$, $A+B=\sum 0.z^n$ $R_A=R_B=1$, $R_{A+B}=+\infty$

• $a_n=\begin{cases}2 & \text{si } n=0\\ 2^n & \text{sinon}\end{cases}$; $b_n=\begin{cases}-1 & \text{si } n=0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$

$R_A=\frac{1}{2}$; $R_B=1$; $C=A\cdot B$, $c_n=\begin{cases}-2 & \text{si } n=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $R_C=+\infty$.

II - Propriétés de la somme

1) Continuité, dérivabilité

Lemme 16 : $\forall r\in]0,R_A[$, A converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ et donc A converge uniformément sur $\overline{D}(0,r)$.

Cor 17 : Il y a donc convergence normale sur tout compact contenu dans le disque ouvert de convergence D_A.

Rq : Il n'y a pas en général convergence uniforme dans le disque ouvert de convergence.
Si une série converge uniformément sur le disque ouvert alors elle converge uniformément sur le disque fermé.

Thm 18 : la somme de la série entière est continue en tout point du disque ouvert de convergence.

Rq : Même si la série entière est convergente sur le disque fermé, la somme n'y est pas forcément continue

Thm 19 : Soit A une série entière, alors sa somme f est intégrable sur tout intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}\cap\{|z|<R_A\}$ et $\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\int_a^b x^n\,dx$.

Prop 20 : $\forall x\in]0,R[$, $a_n x^n=\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}$

$\sum |a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$

Application 21 [Liouville] Si $R_A=\infty$ alors f bornée $\Rightarrow$ f constante.

Déf 22 : la série $A^{(p)}=\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+p)(n+p-1)\dots n\,a_{n+p}z^n$ est la série dérivée p-ième de A. A est infiniment dérivable et $R_{A^{(p)}}=R_A$.

2) Analycité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf 23 : Une fonction g est dite analytique sur Ω si g est développable en série entière (DSE) au voisinage de tout point de Ω.

Thm 24 : Si f est la somme de A alors f est analytique sur D_A et $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ a un rayon de convergence $\geq R_A$.

Rq : Il y a donc unicité du développement en série entière.

Thm 25 : les fonctions analytiques sur $\Omega\subset\mathbb{C}$ sont les fonctions holomorphes sur Ω.

Thm 26 : [zéros isolés] Soit f la somme de A sur D_A alors s'il existe $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ non nulle tel que $z_p\xrightarrow[p\to\infty]{}0$ et $\forall p\in\mathbb{N}$ $f(z_p)=0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n=0$.

Thm 27 : [Bernstein] Soient $a>0$ et $f:]-a,a[\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors si pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x)\geq 0$ alors f est analytique.

exemple 28 : la fonction tan est analytique en 0.

III - Comportement au bord du disque de convergence

1) Convergence

Prop 29 : S'il existe z_0 tel que $|z_0|=R_A$ et $A(z_0)$ converge absolument alors A converge normalement sur $\overline{D_A}$.

/!\ En règle général, on ne peut rien dire sur la convergence de la série au bord de D_A.

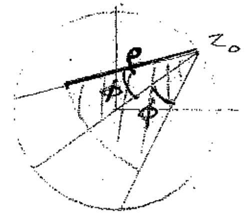
exemple 30 : • $\sum z^n$; $R=1$; Pour $|z|<1$, $\sum z^n=\frac{1}{1-z}$ et pour $|z|=1$ (z^n) ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.
[Cette série diverge sur tout le bord de D]

exemple 31 : • $A(z)=\sum\frac{z^n}{n}$; $R=1$; Pour $z=1$ $A(1)$ est la série harmonique divergente, pour $z=-1$ $A(-1)$ est la série harmonique alternée qui converge par critère de convergence des séries alternées.
[Cette série entière converge en certains point du bord de D_A seulement]

exemple 32 : $\sum\frac{1}{n^2}z^n$, $R=1$, pour $|z|=1$, $|\frac{z^n}{n^2}|=\frac{1}{n^2}$ or $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum\frac{z^n}{n^2}$ converge normalement sur tout le bord du disque de convergence.
[Cette série entière converge sur tout le bord de D]

2) Comportement asymptotique

Thm 33 : [Abel angulaire] S'il existe z_0 tel que $|z_0|=R_A$ et $A(z_0)$ converge alors $\forall\phi\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\rho\in[0;2\cos\phi[$, A converge ~~normalement~~ sur $\Delta(z_0,\rho,\phi)=\{z \mid z=z_0(1-re^{i\theta}),\ 0<r\le\rho,\ |\theta|\le\phi\}$



Prop 34: [Taubérien faible] Soit f la somme de A. On suppose $R_A=1$. S'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $f(x)\xrightarrow[x\to1]{x\in]0,1[} S$ et $a_n=o(\frac{1}{n})$ alors $A(1)$ converge et $A(1)=S$.

IV - Applications des séries entières

1) Calcul de séries numériques

Pour calculer une série numérique, on peut la voir comme une série entière évaluée en un point. Dans certains cas il est plus facile d'étudier une série entière pour trouver sa somme pour connaître sa valeur en un point.

exemple 35: • $a=\sum_{n\ge0}\frac{1}{5n!}$ → on considère $A(z)=\sum_{n\ge0}\frac{z^n}{5n!}=\frac{1}{5}\exp(z)$ ($R_A=+\infty$)

$\boxed{a=A(1)=\frac{e}{5}}$

• $b=\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ → on considère $B(z)=\sum_{n\ge0}\frac{z^{n-1}}{n}=\frac{1}{z}\sum_{n\ge0}\frac{z^n}{n}$ $\boxed{R_B=1}$

$A(z):=\sum_{n\ge0}\frac{z^n}{n}$ $\boxed{R_A=1}$ $\quad A'(z):=\sum_{n\ge0}z^n=\frac{1}{1-z}$ → $A(z)=-\ln(|1-z|)$

On a donc $B(z)=\frac{1}{z}(-\ln(|1-z|))$ et $\boxed{b=B(-1)=\ln 2}$.

2) Dénombrement

En dénombrement, on obtient parfois des quantités (q_n) telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$ q_n dépend des $(q_k)_{k<n}$. On obtient alors des relations de récurrences sur les (q_k) et on considère les séries génératrices exponentielle $\sum_{n\ge0}\frac{q_k}{k!}z^k$ pour obtenir une expression de q_k en fonction de k.

exemple 36: B_n nombre de partition de $[\![1;n]\!]$

[X-ENS] Alg. 1 → $\boxed{\text{DEV}}$ $\quad B_n=\frac{1}{e}\sum_{k\ge0}\frac{k^n}{k!}$ $\quad$ Les (B_n) sont les nombres de Bell

2) Résolution d'équations différentielles ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

a) Cas des systèmes d'équations homogènes à coefficients constants.

On veut résoudre $\frac{d}{dt}Y(t)=AY(t)$ où $Y:t\to\mathbb{K}^n$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée à la norme hermitienne (resp. euclidienne) de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$). On a alors $|||\frac{1}{n!}A^n|||\le\frac{1}{n!}|||A|||^n$ donc $\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!}A^n$ est absolument convergente quelque soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($R=+\infty$).

Déf 37: Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $e^A=\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!}A^n$.

Prop 38: Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent alors $e^{A+B}=e^Ae^B$

Thm 39: la solution Y telle que $Y(t_0)=V_0$ est donnée par $Y(t)=e^{(t-t_0)A}V_0$ pour $t\in\mathbb{R}$.

b) Cas de la dimension 1.

Si les coefficients sont DSE, on cherche une solution $y(t)$ DSE, on pose $y(t)=\sum_{n\ge0}a_nt^n$ et on suppose $R>0$. On injecte cette solution dans l'équation différentielle et on détermine les coefficients (a_n) puis on vérifie que la solution obtenue a bien un rayon de convergence $R>0$.

Rq: Cette méthode est utile lorsque le coefficient d'ordre maximal s'annule où que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

exemple 40: • $4ty''(t)+2y'(t)-y(t)=0$ → $y(t)=\sum\frac{x^n}{(2n)!}=\begin{cases}ch(\sqrt{x}) & x\ge0\\ \cos(\sqrt{-x}) & x\le0\end{cases}$ $R=\infty$ [X-ENS] An. 4

• (non linéaire) $ty'(t)=t+(y(t))^2$ $\}$ $\boxed{\text{DEV}}$

c) Calculer un développement en série entière

Si on cherche le développement en série entière de $f:\Omega\to\mathbb{C}$, Ω ouvert de $\mathbb{K}$, on cherche une équation fonctionnelle vérifiée par f qui satisfait aux hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz alors par unicité de la solution f sera égale à la solution $t\mapsto\sum a_nt^n$ ainsi déterminée.

exemple 41: $f:x\longmapsto\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=\sum_{n\ge0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n\cdots}x^{2n+1}$

Références :

- COMBES, Suites et séries
- GOURDON, Analyse