243 (I)

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemple et applications.

On appelle série entière toute série de terme général $u_n : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a_n complexe

I) Domaine de convergence

__Lemme d'Abel__ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, si $\rho > 0$ est tel que $(a_n \rho^n)$ est bornée alors la série converge pour $|z| < \rho$

__Définition__ Le rayon de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ est le nombre $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ borné}\}$

- Si $R = +\infty$, la série converge absolument en tout point de $\mathbb{K}$
- Si $R = 0$, la série est partout divergente sauf en zéro
- Si $0 < R < +\infty$, la série converge absolument pour $|z| < R$ et diverge grossièrement pour $|z| > R$. On ne peut rien dire sur le cercle $\mathcal{C}(0, R)$, dit cercle d'incertitude

__exemple__ $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum z^n$

__Exemples de détermination du rayon__

- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ mais les séries n'ont pas forcément les même domaines de convergence

__exemple__ $\sum_n \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) z^n$ et $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} z^n$ en $z = 1$

- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, $R_a \geqslant |z_0|$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, $R_a \leqslant |z_0|$

Règle de d'Alembert si $P = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ alors $R = 1/P$

Formule d'Hadamard $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$

__Application__ : produit de Hadamard

$$\sum_n e^{n \sin(n)} z^n \quad (R = 1/e)$$

II) Opérations algébriques sur les rayons

Soit $S(X) = \sum_n a_n X^n$ et $T(X) = \sum_n b_n X^n$ des séries formelles

__A) Somme__ : $S + T = \sum_n (a_n + b_n) X^n$

On a $R_{S+T} \geqslant \min(R_S, R_T)$ et il y a égalité si $R_S \neq R_T$

Pour $|z| < \min(R_S, R_T)$ $(S+T)(z) = S(z) + T(z)$

__B) Produit__ $ST = \sum_n \sum_{p+q=n} a_p b_q X^n$

On a $R_{ST} \geqslant \min(R_S, R_T)$ et il peut y avoir inégalité stricte même si $R_S \neq R_T$

__exemple__ $R_S = +\infty$ pour $S = 1 - z$, $R_T = 1$ pour $T = \sum_n z^n$ mais $R_{ST} = +\infty$

De plus si $|z| < \min(R_S, R_T)$ $ST(z) = S(z)T(z)$

__c) Composition__ Si $T(0) = 0$, $S \circ T = \sum_n a_n T(X)^n$

Si R_S et $R_T > 0$ alors $R_{S \circ T} > 0$ et on a $S(T(z)) = S \circ T(z)$ au voisinage de 0

__D) Inverse pour le produit__ Si $S(0) \neq 0$ il existe une unique série T telle que $ST = TS = 1$

$R_S > 0$ implique $R_T > 0$ et si $|z| < \min(R_S, R_T)$ on a $S(z)T(z) = 1$

) Inverse par la composition : Si $S(0)=0$
et $S'(0)\neq 0$, il existe une unique série T
telle que $T(0)=0$ et $S\circ T = T\circ S = \mathrm{Id}$.
$R_S>0$ implique $R_T>0$ et au voisinage de 0 $S(T(z))=z$
$=T(S(z))$

) Dérivation $\quad S'(X)=\sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1}$

On a $R_S = R_{S'}$ et pour tout $z_0\in D(0,R_S)$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{K}}} \frac{S(z_0+z)-S(z_0)}{z} = S'(z_0)$$

En itérant le procédé on voit que S est indéfiniment dérivable dans le disque ouvert de convergence avec

$$S^p(z) = \sum_{n\geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)z^n$$
$$= \sum_n \frac{(n+p)!}{n!} z^n$$

Corollaire $\quad a_p = \frac{S^p(0)}{p!}$

Corollaire Si une série entière est nulle au voisinage de 0 alors elle est formellement nul

En conclusion les germes de séries entières s'identifient aux séries formelles de rayon >0

$E=\{$fcts définies au voisinage de 0$\}$
$f\sim g \Leftrightarrow f \overset{\circ}{=} g.$

Applications

- $e^{z+w}=e^z e^w$
- $\sum_n n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}$ pour $|z|<1$
- le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ est
$$D_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!} \quad \text{(nombres de Bell)}$$
- résoudre $x^2y''+4xy'+2y=0$

III Propriétés de la somme

Proposition Une série entière de rayon >0 converge uniformément sur tout compact du disque ouvert de convergence

/!\ En général il n'y a pas convergence uniforme sur tout le disque

Proposition La somme d'une série entière de rayon >0 est C^∞ dans le disque ouvert

Proposition Soit f la somme d'une série entière de rayon $R>0$

Pour $0<\rho<R$ on a
$$a_n\rho^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$$

De plus
$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad \text{avec} \quad M(\rho)=\sup_{|z|=\rho}|f(z)|$$

DVT

Définition Une fonction f définie au voisinage de z_0 est développable en série entière au point z_0 si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon >0 tels que

$$f(z) \overset{z_0}{=} \sum_n a_n (z-z_0)^n$$

En abrégé, « f est DSE_{z_0} »

Proposition Soit f une fonction C^∞ définie sur un voisinage réel de 0. Alors f est DSE_0 si et seulement si il existe $\rho>0$, $A>0$, $C>0$ tels que pour tout $x\in]-\rho,\rho[$ et tout entier n

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq CA^n$$

Application $(1+x)^\alpha = \sum_n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

Définition Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, une fonction de D dans $\mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE en tout point de D

Proposition Les fonctions analytiques dans D forment une algèbre

Proposition i) Les séries entières sont analytiques dans le disque ouvert de convergence

ii) Les fractions rationnelles sont analytiques sur leur domaine de définition

Proposition

Soit f une fonction analytique dans un domaine D

Alors i) il existe $x_0\in D$ tq $f^{(n)}(x_0)=0$ pour tout n

ssi ii) il existe $x_0\in D$ tq f nulle au voisinage de x_0

ssi iii) $f=0$ dans D

Corollaire L'algèbre des fonctions analytiques sur D est intègre

Corollaire (Principe du prolongement analytique)
Si deux fonctions analytiques dans un domaine D coïncident au voisinage d'un point alors elles sont identiques dans D

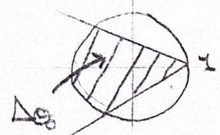
Proposition (Principe des zéros isolés)
Les zéros d'une fonction analytique sur D forment une partie fermée discrète de D

IV Étude au bord

Théorème angulaire d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $=1$, telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière. Soit $\theta_0\in[0,\pi/2[$ et :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z\in\mathbb{C},\ |z|<1 \text{ et } \exists\rho>0,\ \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ z = 1-\rho e^{i\theta} \right\}$$

Alors : $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$



Applications : Calcul de $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ou de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

DVT : théorème angulaire d'Abel

Développement : Nombres de Bell

Référence : Oraux X-ENS, Algèbre 1 p.12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, avec la convention $B_0 = 1$.

But : Exprimer B_n comme somme d'une série.

→ **1ère partie :** Trouver une relation de récurrence entre les B_k

Soit E_k l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ dans lequel la partie contenant $n+1$ est de cardinal k.

On a : $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k} = \binom{n}{n-k} B_{n-k}$

Donc $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} |E_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k}$

i.e. $\boxed{B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k}$

→ **2ème partie :** Série génératrice des B_n vérifiant une équation différentielle.

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$

Cette série entière a un rayon de convergence ≥ 1, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \leq n!$

En effet, c'est immédiat par récurrence (H) sur n : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\right) n! \leq (n+1)!$

f est C^∞ sur $]-R,R[$, donc $\forall x \in]-R,R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\right) x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n$$

On reconnait le produit de Cauchy de $f(x)$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

donc, comme les deux séries [illegible] convergent sur $]-R,R[$,

$$\forall x \in]-R,R[: \begin{cases} f'(x) = e^x f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

donc $\exists c \in \mathbb{R}$: $f(x) = c\, e^{e^x}$, $f(0) = 1 = c\,e$, donc :

$$\boxed{f(x) = e^{e^x - 1}}$$

→ 3ème partie : DSE de f

$$\forall x \in \mathbb{C} : f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{xn}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!} \frac{(xn)^k}{k!}}_{:= u_{n,k}}$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \frac{e^{|x|n}}{n!} = \frac{(e^{|x|})^n}{n!}$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{|x|})^n}{n!} = e^{e^{|x|}}$

La série double est sommable, donc on peut permuter les sommations. Pour $x \in]-R,R[$:

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right)$$

puis par unicité du développement en série [illegible]

[illegible] fin de [illegible], on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boxed{B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}}$$

Développement : Théorème angulaire d'Abel

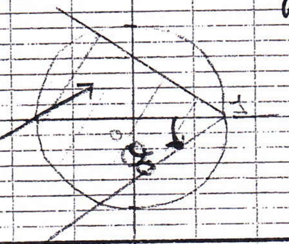
Référence : Gourdon, Analyse p 252

→ **Théorème :** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque de convergence.

Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \; z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$

Alors : $\displaystyle \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Δ_{θ_0}



→ Preuve : Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $R_n = \ldots$

On effectue une transformation d'Abel en remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1)$$

$$= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)$$

Puis en faisant $N \to +\infty$:

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$

. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N$, $|R_n| < \varepsilon$.

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n$$

$$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

. Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$ que l'on écrit $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$

avec $\begin{cases} \rho > 0 \\ \varphi \in [-\theta_0, \theta_0] \end{cases}$

$$|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$$

D'où : $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} = \dfrac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|)$

$$= \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|)$$

$$\leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho}$$

Si $\rho \leq \cos\theta_0$: $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leq \dfrac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \dfrac{2}{\cos\theta_0}$

. Soit $\eta > 0$ tel que $\eta\left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) < \varepsilon$.

Si $|z-1| \leq \inf\{\eta, \cos\theta_0\}$, alors on a la majoration :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

d'où le résultat.

Applications : Ce théorème permet de calculer certaines séries numériques.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2$$

Remarque : Un résultat similaire est le théorème de convergence radial ci-dessous :

> **Théorème de convergence radiale d'Abel.**
>
> Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $z_0 \in \mathbb{C}(0, R)$ tel que la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge.
> Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le rayon $[0, z_0]$, et en particulier :
> $$\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n = \lim_{t \to 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n (t z_0)^n$$

Preuve : Quitte à remplacer a_n par $a_n z_0^n$, on peut supposer $R = 1$ et $z_0 = 1$.
Majorons le reste de la série entière par une transformation d'Abel.
Si $x \in [0, 1]$, on obtient :
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n = R_{N-1} x^N + \sum_{n=N}^{\infty} R_N (x^{n+1} - x^n)$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall N \geq N_0$, $|R_N| \leq \varepsilon$.

Alors $\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} (x^{n+1} - x^n) \leq 2\varepsilon$

Ainsi $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.