243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

Bien que l'étude des séries entières soit apparue dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, leur extension au domaine complexe permet une meilleure compréhension de leurs propriétés, c'est pourquoi nous nous plaçons d'emblée dans le cas d'une var. complexe.

I Définitions et propriétés élémentaires

Considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes, et $z_0 \in \mathbb{C}$.

I.0 Déf [La série entière de coefficients les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à variable complexe est la série des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\begin{pmatrix}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Rayon de convergence

I.1 Lemme d'Abel [G] p 236 [Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z \in B(0,|z_0|)$ et elle converge normalement sur tout compact $K \subset B(0,|z_0|)$

I.2 Cor $R = \sup\{|z| \mid z\in\mathbb{C}\ \sum a_n z^n \text{ cv. abs}\} = \sup\{|z| \mid z\in\mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ cv}\}$
$= \sup\{|z| \mid z\in\mathbb{C}\ a_n z^n \text{ est bornée}\} = \sup\{|z| \mid z\in\mathbb{C}\ a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$

I.3 Déf [On appelle alors R le rayon de convergence de la série entière. Si $R>0$, $B(0,R)$ s'appelle le disque ouvert de convergence et $f = \begin{pmatrix} B(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum a_n z^n\end{pmatrix}$ s'appelle la somme de la série entière.

I.4 Ex. pour $\sum \frac{1}{n!} z^n$ $R=+\infty$ car $\forall z\in\mathbb{C}$ $|z|^n/n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- pour $\sum \frac{1}{n} z^n$ $R=1$ car $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<1 \Rightarrow |z|^n/n \le 1$ mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge
- pour $\sum n!\, z^n$ $R=0$ car $\forall z\in\mathbb{C}$ $n!\,|z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

I.5 Pté [On a $(|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ est abs. cv})$ et $(\sum a_n z^n \text{ est cv} \Rightarrow |z|\le R)$ cf fig 1
$(|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ div. grossièrement})$ et $(\sum a_n z^n \text{ div} \Rightarrow |z|\ge R)$

I.6 Pté [Pour $R\in\mathbb{R}^{+*}$, la convergence absolue de la série en un point du cercle $C(0,R)$ implique la convergence absolue en tout point du cercle.

I.7 ⚠ La convergence en un point du cercle n'implique pas la convergence en tout point du cercle
ex $\sum \frac{1}{n} z^n$ cv en -1, div en 1. $R=1$

2) Détermination du rayon de convergence

Notons R_a, resp. R_b les rayon de cv. des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$

I.8 Pté [
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$ $|a_n| \le |b_n|$ alors $R_a \ge R_b$
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n = \lambda b_n$ où $\lambda\in\mathbb{C}$, alors $R_a = R_b$

Convention : On notera $1/0$ pour $+\infty$ et $1/{+\infty}$ pour 0

I.9 Règle de D'Alembert [G] p 237 [Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $R = 1/l$

↳ I.10 exc Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon $R=1$ car $\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

I.11 Règle de Cauchy [G] p 237 [Si $|a_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $R = 1/l$

↳ I.12 exc pour $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 2 \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$ $|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ \sqrt[n]{2} \text{ si } n \text{ impair} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{cases}$ donc $R=1$

I.13 Rq Dans cet exemple $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1/2 \text{ sinon}\end{cases}$ donc ne converge pas.
La règle de D'Alembert ne permettait pas de conclure.
Mais dans le cas où la règle de D'Alembert s'applique, celle de Cauchy aussi

I.14 Règle d'Hadamard [A.C] p 63 [Notons $l = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$. alors $R = 1/l$

↳ I.15 ex pour $a_n = e^{n\cos(n)}$ $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} e^{\cos(n)} = e$ donc $R = 1/e$

I.16 Rq Dans cet exemple $\sqrt[n]{|a_n|} = e^{\cos(n)}$ ne converge pas.
La règle de Cauchy ne permettait pas de conclure
Mais dans le cas où la règle de Cauchy s'applique, celle d'Hadamard aussi.

I.17 Rq Pour la série $\sum a_n z^{kn}$ où $k\in\mathbb{N}$ il faut adapter la règle de Cauchy.
Si $l = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ alors $R = \sqrt[k]{1/l}$.

II Opérations sur les séries entières

1) Somme et produit [6] p237

II.1 **Déf** [La somme des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série $\sum (a_n+b_n) z^n$.

II.2 **Pté** [Si R est le rayon de cv. de $\sum(a_n+b_n) z^n$ on a :
- $R \geq \min(R_a, R_b)$
- $R_a \neq R_b \Rightarrow R = \min(R_a, R_b)$
- $\forall z \in \mathcal{B}(0, \min(R_a,R_b))$ $\sum(a_n+b_n)z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$

II.3 ex $(a_n)=(1)$ et $b_n=(-1)$ $R_a = R_b = 1$ mais $R=+\infty > 1$ car $\sum(a_n+b_n)z^n = 0$

II.4 **Déf** [Le produit des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série des $\sum c_n z^n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Il s'agit d'un produit de Cauchy point à point.

II.5 **Pté** [Si R est le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ on a :
- $R \geq \min(R_a, R_b)$
- $\forall z \in \mathcal{B}(0, \min(R_a,R_b))$, $\sum c_n z^n = \sum a_n z^n \times \sum b_n z^n$

II.6 ⚠ $R_a \neq R_b$ ne permet pas de conclure

ex $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0[2] \\ 2^n & \text{sinon} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n=0[2] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ $R_a = \frac{1}{2}$ $R_b = 1$ pourtant $R=+\infty$

2) Dérivation et intégration dans le cas réel

Supposons $\sum a_n z^n$ de rayon de cv. $R>0$ et considérons $s = \begin{pmatrix} \mathbb{R}\cap\mathcal{B}(0,R) \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum a_n x^n \end{pmatrix}$

II.7 **Pté** [s est C^∞ et $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[$ $s^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$ [6] p238

II.8 **Cor** [Les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniques et determinés par $\forall p \in \mathbb{N}$ $a_p = \frac{s^{(p)}(0)}{p!}$

II.9 **Rq** Le fait qu'une S.E et sa série dérivée aient les mêmes rayon de convergence est en fait une conséquence immédiate de la règle d'Hadamard.

II.10 Application $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[$ $\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-p-1}{p-1} x^n$ s'obtient en dérivant p fois l'égalité $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

II.11 **Pté** [$\forall x \in]-R,R[$ $\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$

II.12 Application $\forall x \in]-1,1[$ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ s'obtient en intégrant $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

$\forall x \in]-1,1[$ $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ s'obtient en intégrant $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

III Questions de continuité

Supposons $\sum a_n z^n$ de rayon de cv. $R>0$ et considérons $f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{pmatrix}$

1) Continuité sur le disque ouvert de convergence

III.1 **Pté** [
- f est uniformément continue sur tout compact $K \subset \mathcal{B}(0,R)$
- f est continue sur $\mathcal{B}(0,R)$ [6] p238

III.2 ⚠ f n'est pas unif. continue sur $\mathcal{B}(0,R)$

↳ ex $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ n'est pas unif. continue sur $[0,1[$.

III.3 **Cor** Principe des zéros isolés [Si 0 est point d'accumulation des zéros de f alors f est nulle [6] p239

2) Comportement au bord ($R \neq +\infty$, supposons $R=1$)

III.4 Théorème d'Abel [6] p252 cf. fig 2. DEV

On pose pour $\theta_0 \in [0,\pi/2[$, $\Delta_{\theta_0} = \{1-\rho e^{i\theta} / \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [-\theta_0,\theta_0], |1-\rho e^{i\theta}| < 1\}$

[Si $\sum a_n$ cv vers S alors $\forall \theta_0 \in [0,\pi/2[$ $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S$

III.5 **Rq** Le domaine angulaire est nécessaire

ex $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{M_n}$ où $M_n = \begin{cases} 2\times 3^k & \text{si } n=2k \\ 3^{2k+1} & \text{si } n=2k+1 \end{cases}$ $R=1$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ cv

mais il existe $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,1[^{\mathbb{N}}$ tel que $f(r_k e^{i\pi 3^{-k}}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ alors que $r_k e^{i\pi 3^{-k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$

III.6 **Cor** : Convergence radiale [X-AN 2] p190 [Si $\sum a_n$ cv alors f se prolonge de manière unif. continue sur $[0,1]$

III.7 ⚠ La réciproque est fausse

$f = z \mapsto \sum (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ prolongée par $\frac{1}{2}$ en 1 est unif. continue (car $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ l'est)

Pourtant $\sum (-1)^n$ diverge !

III.8 Théorème taubérien faible [6] p 253 [Si $\lim_{\substack{z\in[0,1[\\ z\to 1}} f(z) = S$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ cv vers S

III.9 Théorème taubérien fort [6] p 289 [Si $\lim_{\substack{z\in[0,1[\\ z\to 1}} f(z) = S$ et $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ cv vers S

III.10 **Rq** Ces résultats sont en fait plus généraux. Ils restent vrais si on a $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et si on remplace 1 par z_0 de module R. [X-AN 2] p222 [Z-Q] p

IV Lien entre holomorphie et analycité

1) Holomorphie

IV.1 Pté [La somme d'une série entière est holomorphe.
De plus sa dérivée s'obtient en dérivant termes à termes

IV.2 Rq Puisque la $\mathbb{C}$-dérivée de $z \mapsto a_n z^n$ est aussi $z \mapsto n a_n z^{n-1}$ (pour $n \geq 1$) la $\mathbb{C}$-dérivée de f et la $\mathbb{R}$-dérivée de s coïncident sur $\mathbb{R}$.

IV.3 Rq La formule de Cauchy pour les S.E $\left(\forall r \in]0,R[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta\right)$
[G] p 239
[A.C] p 81
qui se démontre par simple interversion de somme et intégrale peut maintenant se lire comme un cas particulier de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes $\left(\text{pour } K \text{ compact à bord régulier } \xi \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi \text{ si } z \in K\right)$ avec $K = \mathcal{B}(0,r)$ et $\xi = t \mapsto r e^{i\theta}$.

2) Analycité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$

IV.4 Déf [On dit que g est développable en série entière (D.S.E) en z_0 s'il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall h \in \mathcal{B}(0,r)\ f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n h^n$.
[A.C] p 70
Dans ce cas on dira que z_0 est un point régulier de g. dans le cas contraire on parlera de point singulier.
On dit que g est analytique si elle est D.S.E en tout point.

IV.5 ⚠ Le r et les $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépendent du z_0, m̂ pour une f analytique.

IV.6 Pté [Une somme de série entière est analytique (sur le disque ouvert de cv).
[SSF] p 88.
Plus précisément on a :
$\forall z_0 \in \mathcal{B}(0,R),\ \forall h \in \mathcal{B}(0, R - |z_0|)\ f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\, h^n$
C'est ce qu'on appelle le développement de Taylor
cf fig. 3

IV.7 Co Principe des zéros isolés amélioré [SSF] p 88
[Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation, alors f est nulle.

IV.8. Co [Si g est D.S.E en z_0, on a unicité du développement c'est à dire des coefficients $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.9 Pté [f admet au moins un point singulier sur $\mathcal{C}(0,R)$

IV.10 Rq Ce minimum est parfois atteint
ex $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ est DSE pour tout $z_0 \in \mathcal{C}(0,1)$ sauf $z_0 = -1$.
Le cas où tous les points du cercle sont singulier aussi d'après la pté suivante

IV.11 Pté Théorème des lacunes d'Hadamard [ZQ] p 54-55 DEV
Si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$ et si $\sum_n a_n z^{\lambda_n}$ a pour rayon de convergence 1, alors tous les points de $\mathcal{C}(0,1)$ sont singuliers.

3) Equivalence entre holomorphie et analycité

IV.12 Pté Si $g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$ est $\mathbb{C}$-analytique, alors g est holomorphe (où Ω ouvert de $\mathbb{C}$)
Si $t \in \mathcal{F}(\hat{\Omega}, \mathbb{C})$ est $\mathbb{R}$-analytique, alors t est C^∞ (où $\hat{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{R}$)

IV.13 ⚠ Sur $\mathbb{R}$ la réciproque est fausse
↳ ex e^{-1/x^2} prolongée par 0 en 0 est C^∞ mais non analytique.

IV.10 Pté Si $g \in \mathcal{F}(\Omega \subset \mathbb{C}, \mathbb{C})$ est holomorphe, alors elle est $\mathbb{C}$-analytique. [G] p 254
(Ce résultat repose sur la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes que nous admettons)

V Applications courantes

1) A la combinatoire

V.0 On peut résoudre une équation de récurrence du type $\sum_{k=p}^{k=q} a_k b_k = 0$ en introduisant des séries génératrices, comme la série génératrice exponentielle $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$

V.1 ex Calcul des nombres de Bell $b_n = \#\text{partitions de } \{1..n\} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ [X-AG 1] p 12

V.2 ex Calcul des nombres de Catalan $c_n = \#$ arbres binaires à n noeuds $= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ [X-AG 1] p 14

2) A la résolution d'équations différentielles

V.3 On peut résoudre certaines équations différentielles en supposant que la solution est la somme d'une série entière $(\sum a_n x^n)$ puis en résolvant la relation de récurrence obtenue sur les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en vérifiant que la série ainsi obtenue est de rayon de convergence $R > 0$.

V.4 ex $4ty'' + 2y' - y = 0$ a pour solution $f = t \mapsto \begin{cases} ch(\sqrt{t}) & \text{si } t > 0 \\ \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ [SSF] p 98 fig. 1.

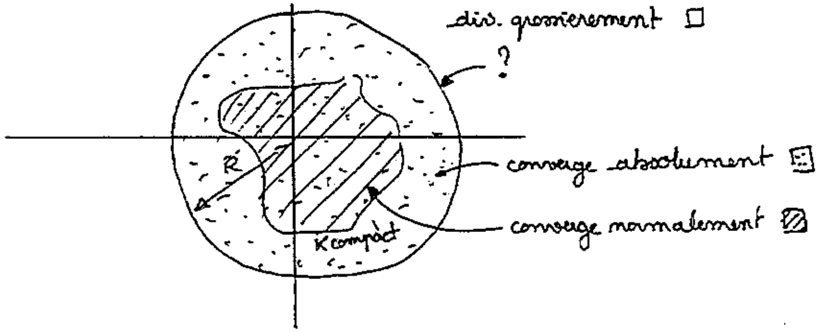


fig. 2.

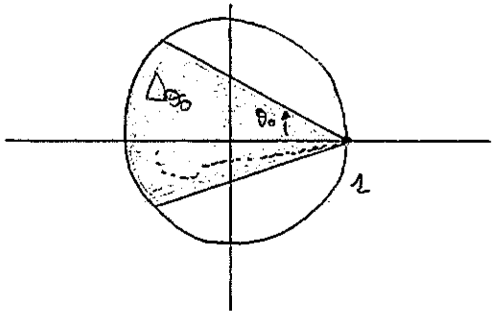
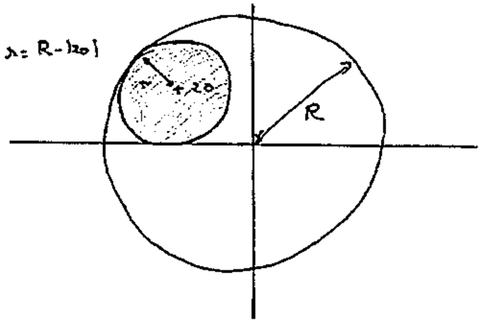


fig. 3.



Bibliographie

[G] Analyse de X. Gourdon 2ème éd. aux éd ellipses

[X-AG 1] Oraux x-ens algèbre 1 } de Francinou, Gianella, Nicolas aux éd. Cassini.

[X-AN 2] Oraux x-ens analyse 2 }

[SSF] Suites et séries de fonctions de J. Moisan, A. Vernotte, N. Tosel aux éd. ellipses

[A.C] Analyse complexe de Amar et Matheron aux éd. Cassini

[Z-Q] Analyse pour l'agrégation de Zuily et Queffélec aux éd. Dunod. (4ème éd)

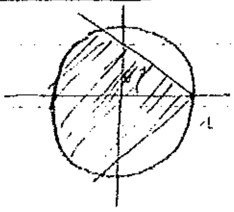
+ développement de Florian Le Manach pour le III.5 (contre-ex 19 dans le PDF).

Théorème d'Abel et théorèmes taubériens

On s'intéresse ici à une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R=1$.
et à sa somme $f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum a_n z^n \end{pmatrix}$.

On a déjà la continuité de f sur le disque ouvert de convergence et le théorème d'Abel apporte une réponse à la question : peut-on étendre cette continuité sur un point du cercle où la série converge ?

93.1 **Théorème d'Abel** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \forall \theta_0 \in [0,\pi/2[\quad \lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$



où $\Delta_{\theta_0} = \{1-\rho e^{i\theta} \mid \rho\in\mathbb{R}^{+*},\ \theta\in[-\theta_0,\theta_0]$ et $|1-\rho e^{i\theta}|<1\}$

cf. Gourdon Analyse p 252 (ds la $2^{\text{ème}}$ éd).

$\underline{\text{Rq}}$ Une version plus forte (R quelconque, 1 remplacé par z_0 quelconque sur le cercle et résultat de continuité uniforme sur Δ_{θ_0}) est donné dans le Zuily-Queffelec p 42-43 ($4^{\text{ème}}$ éd).

Preuve On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour $n\in\mathbb{N}$ $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*\ a_n = R_{n-1} - R_n$.
Soit $z\in\mathcal{B}(0,1)$. Soit $N\in\mathbb{N}$. On va effectuer une transformée d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= R_0 (z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

Or $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ en tant que reste d'une série convergente et $(z^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 2

Donc en passant à limite quand $N \to +\infty$ on obtient

$\forall z \in \mathcal{B}(0,1) \quad f(z) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n (z-1)$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \ |R_n| < \varepsilon$.

Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0,1) \quad |f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n| |z|^n$

$$= |z-1| \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| \underbrace{|z|^n}_{\leq 1}}_{:= C} + \sum_{n=N}^{+\infty} \underbrace{|R_n|}_{<\varepsilon} |z|^n \Big)$$

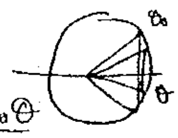
$$\leq |z-1| \Big(C + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \Big)$$

$$\leq |z-1| \Big(C + \varepsilon \frac{1}{1-|z|} \Big)$$

Pour faire tendre $z \to 1$, le quotient $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ pose problème.

On commence donc ici à utiliser Δ_{θ_0} pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Soit $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$.

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|} \times \frac{1+|z|}{1+|z|} = \rho \frac{1+|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2}$$



Or $|z|^2 = (1 - \rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 (\underbrace{\cos\theta^2 + \sin\theta^2}_{=1})$

Donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{+2\rho\cos\theta - \rho^2} = \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho}$ car $\cos\theta_0 \leq \cos\theta$

Donc pour $|z-1| \leq \min(\cos\theta_0 ; \varepsilon)$ on a $\rho \leq \cos\theta_0$ donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$

$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(C + \frac{2}{\cos\theta_0} \right)$

Puisque c'est vrai pour ε quelconque on a bien montré que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S.$$

⚠ Telle quelle la réciproque du théorème est fausse

03.2 ex $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n$.

$\sum (-1)^n z^n$ est de rayon de cv 1

et $\forall z \in \mathcal{B}(0,1) \quad f(z) = \sum (-1)^n z^n = \sum (-z)^n = \frac{1}{1+z}$.

$\forall \theta_0 \in [0, \pi/2[\quad \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \theta_0}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ pourtant $\sum (-1)^n$ diverge.

Cela motive l'introduction des th. taubériens qui donnent des pseudos-réciproques au th. d'Abel.

93.3 Exemples d'utilisation du théorème d'Abel

- Calcul $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
  - → $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées (CSSA)
  - → D'après le théorème d'Abel on a alors
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in]0,1[}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \lim_{z\to 1} \ln(1+z) = \ln(2)$$

- Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
  - → Cette série est cv d'après le CSSA
  - → D'après Abel $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in]0,1[}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{z\to 1} \arctan(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

  (rq ici formellement $a_n = \frac{(-1)^p}{n}$ si $n = 2p+1$, 0 sinon)

Une première pseudo-réciproque est le théorème suivant.

93.4 **Théorème taubérien faible** $\left[\begin{array}{l} |a_n| = o(1/n) \\ \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in]0,1[}} f(z) = S \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge vers S

cf Gourdon Analyse p 253 (2^{me} éd) + K. Madère dév. d'analyse p 197.

Preuve Notez l'astuce : $(1-z^k) = (1-z)(1+z+z^2+\dots+z^{k-1})$ pour $k\geq 1$.

Soit $z\in]0,1[$. Soit $N\in\mathbb{N}$. On note $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$.

$$|S_N - f(z)| = \left|\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k z^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \underbrace{|1-z^k|}_{= \left|(1-z)\times\sum_{i=0}^{k-1} z^i\right|} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k z^k|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} |1-z|\,|a_k| \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{|z|^i}_{\leq 1}}_{\leq k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} k\times \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{N}} \times |a_k| \times |z|^k$$

$$\leq |1-z| \sum_{k=0}^{N} k|a_k| + \frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{+\infty} k|a_k|\,|z|^k.$$

On utilise alors l'hypothèse forte $|a_n| = o(\frac{1}{n})$ i.e. $n|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'une part pour introduire $M_N = \sup_{n\geq N} n|a_n|$ sachant que $M_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, et d'autre part pour écrire à l'aide du théorème de Cesàro $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k|a_k| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. D'après ce qui précède il existe $N\in\mathbb{N}$ assez grand pour que
- $\forall n\geq N$ $M_n \leq \varepsilon/2$ et - $\forall n\geq N$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leq \varepsilon/2$.

On a alors $\forall n \geq N$ $|S_n - f(1-\frac{1}{n})| \leq |1-(1-\frac{1}{n})| \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{k|a_k|}_{\leq M_n} |z|^k$ car $1-\frac{1}{n} \in]0,1[$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} M_n \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

$$\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{n} M_n \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{= \frac{1}{1/n} = n}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \underbrace{M_n}_{} \leq \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon$$

Donc $\lim_{N \to +\infty} |S_N - f(1-\frac{1}{N})| = 0$, or $f(1-\frac{1}{N}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lim_{z \to 1} f(z) = S$

D'où nécessairement $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$.

93.5 __Théorème taubérien fort__ $\left[\begin{array}{l} |a_n| = O(\frac{1}{n}) \\ \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in]0,1[}} f(z) = S \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ cv vers S

Cf Gourdon Analyse p293. c'est une preuve assez différente qui utilise entre autre l'approximation par des polynômes (th de Weierstraß). + compliqué et + long.

Rq D'autres versions sont données dans croux x-ens analyse 2
pr Abel p 180.
pr taubériens p222

Développement : Théorème des lacunes de Hadamard.

Théorème : Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que il existe $\alpha>1$ tel que $\forall n\geq 0$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geq\alpha$

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon 1.

Alors, tout point du cercle de rayon 1 est un point singulier de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$.

Démonstration : On montre d'abord que 1 est un point singulier.

On nome f la somme de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ sur son disque de convergence.

Supposons que f admette un prolongement analytique g dans $D(0,1)\cup D(1,\varepsilon)$ avec $\varepsilon>0$. (On note $\Omega = D(0,1)\cup D(1,\varepsilon)$)

On pose $\varphi(z) = \frac{z^p+z^{p+1}}{2}$ où p est un entier tel que

$$p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n \text{ si } n\geq 0 \qquad (1)$$

(Ceci est possible car $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq \alpha > 1$.)

Alors $\varphi(\overline{D(0,1)}) \subset \Omega$.

[En effet, $\varphi(1) = 1\in\Omega$ et si $z\in\overline{D(0,1)}\setminus\{1\}$ alors $|\varphi(z)| = \left|\frac{z^p(z+1)}{2}\right| \leq \left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$ si $z\neq 1$]

On pose $D_\varepsilon = \{z, |z|\leq 1+\varepsilon\}$

Comme $\varphi(\overline{D(0,1)})$ est compact et $\varphi^{-1}(\Omega)$ est ouvert et que $\overline{D(0,1)} = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{D_\varepsilon}$, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $\overline{D_{\varepsilon_0}}\subset\varphi^{-1}(\Omega)$

En posant $R = 1+\varepsilon_0$, on a donc $|z|<R \Rightarrow \frac{z^p+z^{p+1}}{2}\in\Omega$.

La fonction $z \mapsto g\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)$ est donc holomorphe dans $D(0,R)$ et donc il existe une série entière telle que

$$g\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)=\sum_{n\geq 0} b_n z^n \quad , \text{ si } |z|<R.$$

Si $|z|<1$, on a $|\varphi(z)|<1$, donc

$$g\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)=f\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(z)$$

où $P_n(z)=\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}$

Pour tout $n\geq 0$, la plus grande puissance de z dans P_n est $(p+1)\lambda_n$ qui est (d'après (1)) inférieur strictement à la plus petite puissance de z dans P_{n+1}.

On peut donc écrire que $\sum_{n=0}^{N} a_n\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}=\sum_{n=0}^{(p+1)\lambda_N} b_n z^n$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall N\geq 1$

Pour $z\in\,]1,R[$, on a $\frac{z^p+z^{p+1}}{2}>1$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on a que $\sum_{n=0}^{N} a_n\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)$

C'est absurde car $\left|\left(\frac{z^p+z^{p+1}}{2}\right)\right|>1$.

→ Donc 1 est ~~régulier~~ singulier pour $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$. Soit z_0 tq $|z_0|=1$.

En étudiant la série $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, on montre que 1 est un point singulier pour $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ et donc que z_0 est un point singulier pour $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$

$\square$