243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

I. Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Déf: Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, avec z une variable complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

Pb: On souhaite savoir pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

Prop: [Lemme d'Abel] Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(|a_n||z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée:

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) $\forall r \in \mathbb{R}$, $0 < r < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$.

Déf: Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence de A est le nombre (réel ou $+\infty$)

$R_A = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

(Cette définition est justifiée par le lemme d'Abel)

Ex:
- $A = \sum \frac{z^n}{n!}$ (série exponentielle). $\forall r > 0$, $\left(\frac{r^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée: $R_A = +\infty$.
- $B = \sum z^n$. Pour $r > 1$, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, pour $r \in [0, 1]$, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée: $R_B = 1$.

Déf: Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière.
Le disque ouvert de convergence est le disque $D_A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_A\}$. Le cercle de convergence est le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_A\}$. Le disque fermé de convergence est noté $\overline{D_A}$, c'est la réunion du disque ouvert et du cercle de convergence.

Rq: D'après le lemme d'Abel, la série converge normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence. On ne peut a priori rien dire sur son comportement au bord.

Ex:
- $A = \sum \frac{z^n}{n+1}$. La série diverge pour $z = 1$ (série harmonique) mais converge pour $z = -1$, par critère des séries alternées.

2) Détermination du rayon de convergence

Prop: [Règle de d'Alembert]
Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière.
Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R_A = \frac{1}{\lambda}$.
(avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Ex:
- $A = \sum n^\alpha z^n$, $\alpha > 0$. $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right| = 1$, donc $R_A = 1$.

Prop: [Formule de Cauchy-Hadamard]
Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière.
Alors $R_A = \dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}$.

3) Opérations sur les séries entières

On se donne $A = \sum a_n z^n$, $B = \sum b_n z^n$, $C = \sum c_n z^n$ des séries entières, R_A, R_B, R_C leurs rayons de convergence respectifs.

Déf-prop: Si $c_n = a_n + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la série C vérifie $R_C \geq \min(R_A, R_B)$.

Déf-prop: Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si $c_n = \lambda a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la série C vérifie $R_C = R_A$.

Déf-prop: Si $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la série C est appelée produit de Cauchy des séries A et B, son rayon de convergence R_C vérifie $R_C \geq \min(R_A, R_B)$.

Ex:
- $A = \sum z^n$, $B = \sum \frac{1}{2^n} z^n$, $C = A \cdot B = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) z^n = \sum_{n\geq 0} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) z^n$

$R_A = 1$; $R_B = 2$; $R_C = 1$

Rq: Le rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières A et B peut être infini, avec R_A et R_B finis.

Ex : • Si $a_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n=0 \\ 2^n \text{ sinon} \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n=0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$, alors $R_A = \frac{1}{2}$, $R_B = 1$. Si $C = A.B$, $c_n = \begin{cases} -2 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $R_C = +\infty$.

Prop : (inverse pour le produit) Si $A(0) \neq 0$, il existe une unique série entière B telle que $AB = BA = 1$.
$R_A > 0$ implique $R_B > 0$ et si $|z| < \min(R_A, R_B)$, on a $A(z)B(z) = 1$.

II. Propriétés de la somme

Dans cette section on se donne une série entière $A = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R_A > 0$. On se donne les deux applications : $s : D(0,R_A) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $f :]-R,R[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) Continuité

Th : s est continue sur $D(0,R_A)$.

Rq : La convergence de la série sur le disque fermé de convergence n'implique pas la continuité de la somme s sur le disque fermé.

Application : [Principe des zéros isolés]
S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes non nuls telle que $s(\alpha_n) = 0$ pour tout n et $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Dérivabilité sur $\mathbb{R}$

Prop : La somme sur $\mathbb{R}$ f est de classe $\mathcal{C}^1$. La série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, et $\forall x \in]-R_A, R_A[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Cor : • f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_A, R_A[$. De plus, $\forall x \in]-R_A, R_A[$, $\forall p \geq 1$, $f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\cdots(n+p) a_{n+p} x^n$.
• $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$.

3) Intégrabilité

Prop : Si $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_A, R_A[$ alors f est intégrable sur $[\alpha,\beta]$ avec $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$

4) Analyticité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf : Une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω.

Th : Si f est la somme de A, alors f est analytique sur le disque ouvert de convergence de A, et la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à R_A.

Rq : Il y a donc unicité du développement en série entière.

Déf : • Une fonction $g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $z_0 \in \Omega$ (Ω ouvert) si la limite $g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ existe.
• g est dite holomorphe sur Ω si g est holomorphe en z_0, $\forall z_0 \in \Omega$.

Th : Les fonctions analytiques sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ sont les fonctions holomorphes sur Ω.

Th : [Formule de Cauchy]
$\forall r \in]0, R_A[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} s(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta$

Application : [Théorème de Liouville]
Si $R_A = +\infty$ et si s est bornée sur $\mathbb{C}$, alors s est constante.

Th : [Egalité de Parseval]
$\forall r \in]0, R_A[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |s(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Application : Si $R_A \geq 1$, ~~et~~ s est bornée sur $D(0,1)$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$ alors s est une fonction polynôme.

III. Comportement au bord du disque de convergence

Prop: Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_A. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R_A$ et $\sum a_n z_0^n$ converge absolument, alors A converge normalement sur son disque fermé de convergence.

Ex: • $A = \sum z^n$, $R=1$. Pour $|z|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et pour $|z|=1$, (z^n) ne tend pas vers 0. A diverge donc grossièrement sur le bord de son disque de convergence D_A.

• $A = \sum \frac{z^n}{n}$, $R=1$. A diverge en $z=1$ mais converge en $z=-1$. La série entière A converge en certains points du bord seulement.

• $A = \sum \frac{z^n}{n^2}$, $R=1$. Si $|z|=1$, $\left|\frac{1}{n^2}\right| |z^n| = \frac{1}{n^2}$, et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. A converge donc normalement sur $\overline{D_A}$.

Th: [Théorème d'Abel angulaire]

Soit $A = \sum a_n z^n$ de rayon R_A. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R_A$ et $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\forall \phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\rho \in [0; 2R_A \cos\phi]$, A converge sur $\Delta(z_0, \rho, \phi) = \{ z \mid z = z_0(1 - re^{i\theta}), 0 \le r \le \rho, |\theta| \le \phi \}$, uniformément.

Th: [Théorème taubérien fort] **[DEV]** [GOU] p.289

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = O(\frac{1}{n})$ lorsque $n \to +\infty$. Si $A = \sum a_n z^n$, $R_A \geq 1$ et sa somme f vérifie $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Déf: Soit $A = \sum a_n z^n$ de rayon R_A. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R_A$ est dit régulier si il existe un disque ouvert D_{z_0} centré en z_0 tel que la somme de A admette un prolongement analytique sur $D_A \cup D_{z_0}$. z_0 est dit singulier sinon.

Ex: • Si $A = \sum z^n$, $\forall z \in D(0,1)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Sur le bord, 1 est le seul point singulier, les autres sont réguliers.

Th: [Séries lacunaires d'Hadamard] **[DEV]** [ZUI] p.54

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers >0 telle que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon 1. Alors tous les points du bord du disque de convergence sont singuliers.

IV. Applications des séries entières

1) Calcul des séries numériques

On peut voir une série numérique comme une série entière évaluée en un point, ce qui simplifie parfois le calcul de sa somme.

Ex: • Soit $b = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On introduit $B = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$, $R_B = 1$. On introduit $A = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$, de somme s. $\forall |z|<1$, $s'(z) = \frac{1}{1-z}$. On en déduit $s(z) = -\ln(|1-z|)$ $\forall z \in D(0,1)$ et $B = \frac{1}{z}(-\ln(|1-z|))$. D'où $b = B(-1) = \ln 2$.

2) Dénombrement

Ex: [Nombres de Bell]

B_n : nombre de partitions de $[\![1; n]\!]$.

On détermine une relation de récurrence: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. On utilise la série génératrice exponentielle $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ et on en déduit B_n en fonction de n:

$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

3) Théorème de Bernstein (sur les séries entières)

Th: [Bernstein]

Soit $a>0$, $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$. Alors f est analytique sur $]-a, a[$.

Références : [GOU] Gourdon, <u>Les maths en tête, Analyse</u>, 2ème édition
[ZUI] Queffélec, Zuily, <u>Analyse pour l'agrégation</u>, 3ème édition

Théorème Taubérien Fort (Hardy-Littlewood)

Xavier ROLLAND - Alexandre BLANCHE

Théorème. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels telle que* $a_n = O(\frac{1}{n})$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = l$. *Alors la série* $\sum a_n$ *converge et sa somme vaut* l.

Démonstration : On suppose $l = 0$, on peut se ramener simplement au cas $l \neq 0$ en ajoutant une constante. On pose $g = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1]}$ et Φ l'ensemble des fonctions $\phi : [0;1] \to \mathbb{R}$ telles que $\sum a_n \phi(x^n)$ converge pour tout $x \in [0;1[$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \phi(x^n) = 0$. Φ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons F la somme de la série entière $\sum a_n$.

Il suffit de montrer que $g \in \Phi$: en effet, pour $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$, $x^n < \frac{1}{2}$, d'où $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N_x} a_n$ avec $N_x = \lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \rfloor$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} N_x = +\infty$, si $g \in \Phi$, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

Soit $p(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $p \in \Phi$: pour tout $x \in [0;1[$, $\sum a_n p(x^n) = \sum a_n (x^k)^n$ converge, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = F(x^k)$, d'où $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = 0$. Par linéarité, toute fonction polynôme nulle en 0 est dans Φ.

Par ailleurs, soit $q(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0;1[$, on a :

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t$. Le résultat est vrai pour un polynôme q quelconque par linéarité.

On cherche à approcher g par des polynômes vérifiant certaines propriétés. On pose $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)}$ pour $x \in]0;1[$, $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$. $h(x)$ vaut $\dfrac{1}{x-1}$ sur $[0;\frac{1}{2}[$ et $\dfrac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{2};1]$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe deux fonctions continues s_1, s_2 telles que $s_1 \leqslant h \leqslant s_2$ et $\displaystyle\int_0^1 s_2(t) - s_1(t)\mathrm{d}t < \epsilon$. Puisque s_1 et s_2 sont continues, d'après le théorème de Weierstrass, il existe t_1 et t_2 deux polynômes tels que $|t_1 - s_1| < \epsilon$ et $|t_2 - s_2| < \epsilon$ sur $[0;1]$. En posant $u_1 = t_1 - \epsilon$ et $u_2 = t_2 + \epsilon$, on a $u_1 < s_1 \leqslant h \leqslant s_2 < u_2$ et $\displaystyle\int_0^1 u_2(x) - u_1(x)\mathrm{d}x < 5\epsilon$.

On a $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ sur $[0;1]$. On pose $p_1(x) = x + x(1-x)u_1(x)$ et $p_2(x) = x + x(1-x)u_2(x)$.

Ces polynômes vérifient $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$, $p_1 \leqslant g \leqslant p_2$ et pour $q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = u_2(x) - u_1(x)$, $\displaystyle\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x < 5\epsilon$.

Montrons maintenant que $g \in \Phi$. Soit $\epsilon > 0$, prenons P_1, P_2, Q vérifiant les propriétés précédemment énoncées (on simplifiera : $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x < \epsilon$). Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant \frac{M}{n}$. Soit $x \in [0;1[$:

$$|\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n|(P_2 - P_1)(x^n) \leqslant M \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n(1-x^n)}{n} Q(x^n) \leqslant M(1-x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q(x^n)$$

Car pour tout $n \geqslant 1$, $(1 - x^n) \leqslant n(1-x)$. Donc on a :

$$|\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)| \leqslant |\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)| + M(1-x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q(x^n)$$

On a vu que le deuxième terme de la somme tend vers $M\epsilon$ quand x tend vers 1^-, donc il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $\forall x \in [\lambda_1; 1[$, $|\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)| \leqslant |\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)| + 2M\epsilon$.

De plus, comme $P_1 \in \Phi$, le premier terme tend vers 0 quand x tend vers 1^-. Donc il existe λ_2 tel que $\forall x \in [\lambda_2; 1[$, $|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)| \geqslant \epsilon$. Finalement, il existe $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ tel que $\forall x \in [\lambda; 1[$, $|\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)| \leqslant (1 + 2M)\epsilon$. On a donc $g \in \Phi$.

□

Théorème des Lacunes de Hadamard

Xavier ROLLAND - Alexandre BLANCHE

Théorème. *Soit $\alpha > 1$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers telle que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \alpha$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors pour tout $|z| = 1$, z est un point singulier.*

Démonstration : Soit f la somme de la série entière. Supposons que 1 soit un point régulier de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{\lambda_n}$: il existe $t > 0$ tel que f admet un prolongement analytique g sur $\Omega = D \cap D(1,t)$.

Il existe $p \geqslant 1$ tel que $\frac{p+1}{p} < \alpha$, d'où $p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Posons $\phi(z) = \frac{z^p + z^{p+1}}{2} = \frac{z^p(1+z)}{2}$. On a :

$$\phi(\overline{D}(0,1)) \subset \Omega$$

En effet, $\phi(1) = 1$ et si $z \in \overline{D}(0,1)\backslash\{1\}$, $|z+1| < 2$, d'où $|\phi(z)| < 1$. Comme Ω est ouvert et ϕ est continue, $\phi^{-1}(\Omega)$ est ouvert. De plus, $\overline{D}(0,1) \subset \phi^{-1}(\Omega)$ est compact, donc il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\overline{D}(0,R) \subset \phi^{-1}(\Omega)$ avec $R = 1 + \epsilon_0$.

On a donc, pour $z \in \overline{D}(0,R)$, $\phi(z) = \frac{z^p + z^{p+1}}{2} \in \Omega$, d'où $g \circ \phi$ est holomorphe sur $\overline{D}(0,R)$. On peut développer $g \circ \phi$ en série entière sur $\overline{D}(0,R)$:

$$g \circ \phi(z) = g\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \forall |z| < R$$

Par ailleurs, à l'intérieur du disque $\overline{D}(0,1)$, on a :

$$g\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = f\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z), \forall |z| < 1$$

Avec pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_n(z) = \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \frac{1}{2^{\lambda_n}} \sum_{k=0}^{\lambda_n} \binom{\lambda_n}{k} z^{p\lambda_n + k}$$

Les degrés des termes non-nuls d'un polynôme P_n sont donc compris entre $p\lambda_n$ (supérieur à $(p+1)\lambda_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$) et $(p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1}$ d'après l'hypothèse de départ ; deux polynômes distincts P_n et P_m n'ont donc aucune puissance commune. On peut donc faire l'identification pour les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_N} b_k z^k, \forall z \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}^*$$

Maintenant, soit $z \in \,]1\,;R[$, et $\omega = \phi(z) > 1$. Comme $|z| < R$, on a $\sum\limits_{n=0}^{N} b_n z^n \to g(\omega)$ quand $N \to +\infty$. Donc, en identifiant au premier membre de l'égalité précédente, $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \omega^n \to g(\omega)$ quand $N \to +\infty$, ce qui est absurde car $|\omega| > 1$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{\lambda_n}$ doit diverger à l'extérieur du disque fermé de convergence $\overline{D}(0,1)$.

Enfin, soit $|z_0| = 1$. Si z_0 est un point régulier de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{\lambda_n}$, alors 1 est un point régulier de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z_0^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, ce qui est absurde car $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z_0^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est une série lacunaire. Donc pour tout $|z| = 1$, z est un point singulier de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{\lambda_n}$.

□