243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme, Exemples et Applications

I- Séries entières

1) Convergence des séries entières

Def 1 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Lme 2 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors : - $\forall z, |z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
- $\forall 0<r<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$

Def 3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière (SE). $R = \sup\{r\geq 0, |a_n| r^n \text{ bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série

App 4 : $\forall z \in \mathbb{C}$, si $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
si $|z|>R$, $\sum a_n z^n$ diverge

et $\forall 0<r<R$, $\sum a_n z^n$ cvge normalement sur $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$

Ex 5 : $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence

Def 6 : Le disque $D=\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$ est appelé disque de convergence

Rmq 7 : Sur $\mathcal{C}=\{z, |z|=R\}$, on ne peut rien dire sur la convergence de la série

* Dans toute la suite, on considère une SE $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et de disque de convergence D.

Règle 8 (d'Alembert) : Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0,+\infty]$, alors la SE admet pour rayon de convergence $R = 1/\lambda$

Convention : $1/0 = +\infty$ et $1/{+\infty} = 0$

Ex 9 : $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Règle 10 (de Cauchy) : Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0,+\infty]$, $R = 1/\lambda$

Ex 11 : La SE $\sum 2^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1/2$

Règle 12 (Hadamard) : Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0,+\infty]$, $R = 1/\lambda$

Ex 13 : La SE $\sum z^{2n}$ a pour rayon de convergence $R=1$.

2) Opérations sur les séries entières

Soient $f = \sum a_n z^n$ et $g = \sum b_n z^n$ deux SE de rayons de convergence respectifs $R, R' \in \mathbb{R}_+^*$ et D, D' les disques de convergences respectifs.

Prop 14 : $f+g = \sum (a_n+b_n) z^n$ a pour rayon de convergence R'' vérifiant $R'' \geq \min(R,R')$. Sur $D\cap D'$, $f+g$ est la somme de la SE

Prop 15 : Si $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, la SE $\sum c_n z^n$ est le produit de Cauchy de f et g. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \min(R,R')$
Sur $D\cap D'$, fg est la somme de $\sum c_n z^n$.

Rmq 16 : On ne peut, en général, pas être plus précis sur R''.

Ex 17 : $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont des rayons de convergence égaux à 1 mais leur somme a un rayon de convergence infini.

3) Régularité de la somme

Thm 18 : L'application $z \mapsto \sum a_n z^n$ est continue sur D

Thm 19 : Soit f la somme d'une SE de la variable réelle. f est intégrable sur tout intervalle $[a,b] \subset]-R,R[$ et
$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_a^b t^n dt$

Def 20 : On appelle série dérivée de $\sum a_n z^n$, la SE $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$

Prop 21 : Une SE et sa série dérivée ont même rayon de cvgence

Def 22 : Une fonction f est dérivable en $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ ouvert si
$U\setminus\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite en z_0.
$f'(z_0)$, appelée dérivée de f en z_0, sera alors cette limite.

* Si f dérivable sur tout U, on parle de fonction holomorphe

Thm 23 : En tout $z_0 \in D$, la somme f de $\sum a_n z^n$ est dérivable et $f'(z_0) = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$

Cor 24 : Dans D, f est $\mathcal{C}^\infty$ et on a : $\forall p \geq 0, \forall z \in D, f^{(p)}(z) = \sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$ et $\forall p \geq 0, a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ donc $f(z) = \sum \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$.

Csq 25 : Si deux séries coïncident sur un voisinage de 0, elles sont égales sur tout le disque.

Def 26 : La série génératrice d'une variable aléatoire discrète X est définie par $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X=n) s^n$.

Prop 27 : C'est une SE de rayon de convergence supérieur à 1. Cette série caractérise la loi de X.

App 28 (Processus de Galton-Watson) : Soit (T_i^n) une famille de variables aléatoires iid, à valeurs sur $\mathbb{N}$. On définit $(Z_n)_n$ tel que $\begin{cases} Z_0 = 1_{Z_n} \\ Z_{n+1} = \sum_{i\geq 1} T_i^n \end{cases}$. On pose $m = \mathbb{E}[X']$ et on suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 1) \neq 1$

Si $m \leq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1$

Si $m > 1$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) > 0, \forall n$.

II - Propriétés locales de la somme d'une série entière

1) Fonctions développables en séries entières

Def 29 : Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. f est dite développable en SE en z_0 ($DSE(z_0)$) s'il existe une SE $\sum a_n z^n$ de rayon $R \neq 0$ et V un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall z \in V, f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$.

Def 30 : Soit f définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. On appelle série de Taylor à l'origine de f la SE $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$

Thm 31 : Si f est $DSE(0)$ alors f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de l'origine, voisinage sur lequel elle est égale à sa série de Taylor. Ce développement est alors unique.

Thm 32 : $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ est $DSE(0)$ $\Leftrightarrow$ $\exists r > 0$ tel que :

- $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[)$
- $\forall t \in]-r, r[$, $R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
  $\exists c \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

* f coïncide alors avec sa série de Taylor sur $]-r, r[$

C-ex 33 : $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0, \forall n$

Donc f n'est pas $DSE(0)$

Ex 34 :
- $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n, \forall t \in]-1, 1[$
- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n, \forall z \in \mathbb{C}$

Def 35 : On définit la fonction exponentielle complexe par $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Elle a un rayon de convergence infini

On définit aussi $\begin{cases} \cos t = \mathrm{Re}(e^{it}) \\ \sin t = \mathrm{Im}(e^{it}) \end{cases}$ des applications DSE

App 36 (Résolution d'équa diff) : Soit f une fonction vérifiant l'équation (E). Si f est somme d'une SE $\sum a_n z^n$, on peut reporter son expression dans (E) et ainsi obtenir son DSE.

Ex 37 : Le DSE de $f(x) = \ln(1+x)^2$ est $\sum_{n\geq 0} 2 \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^n}{k}$

Ex 38 : Si B_n est le nombre de partition de $[\![1, n]\!]$, $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}$

2) Comportement de la somme au bord du disque D.

Thm 39 (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R\geq 1$ et de somme f sur D, telle que $\sum a_n$ converge. On fixe $\theta_0 \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z|<1, \exists \rho>0, \exists \theta \in [-\theta_0,\theta_0], z = 1-\rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n$

Thm 40 (taubérien faible) : Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R=1$ et de somme f sur D. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$.
Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = S$.

Def 41 : f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite analytique sur U si elle est DSE en tout point de U.

Def 42 : $a\in\mathcal{C}$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert centré en a, D_a, tel que f admette un prolongement analytique dans $D\cup D_a$. a est dit singulier s'il n'est pas régulier.

Ex 43 : Pour la série $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$, 1 est singulier et tous les points de $\mathcal{C}\setminus\{1\}$ sont réguliers.

Thm 44 : Il y a toujours un point singulier sur $\mathcal{C}$

Ex 45 : • Pour $\sum \frac{z^n}{n}$, $R=1$ et la série diverge en $z=1$ mais converge en $z=-1$
• Pour $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $R=1$ et si $|z|=1$, la série converge normalement sur $\bar{D}$.

Thm 46 (lacunes de Hadamard) : Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\alpha>1$ et $\lambda_{n+1} \geq \alpha\lambda_n$. Soit $\sum a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence $R=1$.
Alors tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

III - Du local au global : analyticité.

Thm 47 : Si une SE a un rayon $R>0$, la somme f est analytique sur D

Thm 48 (prolongement) : Soient U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a\in U$ et f analytique sur U. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $f\equiv 0$ sur U
ii) $f\equiv 0$ sur un voisinage de a
iii) $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(a)=0$

Thm 49 (zéros isolés) : Soit f la somme de $\sum a_n z^n$ sur D. S'il existe $(z_p)_p \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} f(z_p)=0, \forall p \\ z_p \to 0\end{cases}$, alors $a_n=0, \forall n\in\mathbb{N}$

Csq 50 : Soient f, g sommes respectives de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et $(z_p)_p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} f(z_p)=g(z_p), \forall p \\ z_p \to 0\end{cases}$, alors $a_n=b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Prop 51 (formule de Cauchy) : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon $R>0$ et de somme f sur D, alors :
$\forall r\in]0,R[, \forall n\in\mathbb{N}, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$

Thm 52 (Liouville) : Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence infini. Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, la somme de cette série, est bornée, alors f est cste.

Thm 53 (Parseval) : $\forall r\in]0,R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$

Références :
-> Gourdon, Analyse
-> Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3
-> Zuily-Queffélec, Analyse pour l'Agrégation
-> Page personnelle de Fabrice Grela