Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

243

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Généralités sur les séries entières

1) Premières définitions

Déf 1 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle série des f_n la suite $(\sum_{n=0}^{N} f_n)_{N\in\mathbb{N}}$, notée $\sum_{n\geq 0} f_n$.
Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge, on peut définir la somme en x de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Déf 2 : Une série est dite entière s'il existe $a \in \mathbb{K}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (x-a)^n a_n$.
On dit alors que la série est centrée en a.

Rq 3 : Sans perdre de généralité, on peut supposer par translation que $a = 0$.

Ex 4 : $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série entière centrée en 0.

Déf 5 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que (f_n) converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Déf 6 : Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement si $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty < \infty$

Prop 7 : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément.

2) Rayon de convergence

Prop 8 : (Lemme d'Abel)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, et $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Alors
- $\forall x \in \mathbb{K}$, si $|x| < |x_0|$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge simplement
- $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $r < |x_0|$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente sur $B(0,r)$

Déf 9 : On définit pour une série entière son rayon de convergence $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$

Prop 10 : S est définie et est continue sur $B(0,R)$

Prop 11 : La série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge grossièrement pour tout $x \notin \overline{B(0,R)}$.

Rq 12 : Pour $|x| = R$, on ne peut pas conclure de manière générale sur la convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Ex 13 : • $\sum_{n\geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $S(x) = \frac{1}{1-x}$

• $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et pour somme $S(x) = \exp(x)$

• $\sum_{n\geq 0} n!\, x^n$ a pour rayon de convergence 0.

Rq 14 : Sur une algèbre normée, si $\sum_{n\geq 0} a_n \|x\|^n$ converge, on peut définir la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ex 15 : On peut définir $\exp(A)$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3) Opérations sur les séries entières

Prop 16 : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ 2 séries entières de rayon de convergence R_a et R_b.
On définit la somme de ces deux séries par $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$, de rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$

C-Ex 17 : Il n'y a pas égalité des rayons de convergence
$\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0} -z^n = 0$ de rayon $+\infty$.

Prop 18 : On définit le produit de deux séries entières par $\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$, de rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$

C-Ex 19 : $\sum_{n\geq 0} z^n \cdot (1-z) = 1$ de rayon de convergence $+\infty$

Prop 20: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, $a_0 \neq 0$, de somme S. La série admet une série entière pour inverse, de rayon de convergence $R = \inf \{|x|,\ x \in \mathbb{K} \text{ tel que } S(x) = 0\}$

II) Propriétés de la somme

1) Régularité des séries entières d'une variable réelle

Thme 21: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de somme S.
Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$, et S' est la somme de la série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, de même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Coro 22: $S :]-R,R[\to \mathbb{K}$ est $\mathcal{C}^\infty$.
et $S^{(p)}(0) = p!\, a_p$

Thme 23: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de somme S.
Alors une primitive de S est la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, de même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

Coro 24: Unicité des coefficients.
Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, alors $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Déf 25: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si il existe $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in B(a,R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Rq 26: f développable en série entière $\Rightarrow f$ $\mathcal{C}^\infty$
mais la réciproque est fausse.

C-Ex 27: $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n} \cos(n^2 x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Thme 28: Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il existe f $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0
$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Thme 29: Soit f $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
f est développable en série entière en 0 ssi sa série de Taylor converge vers f au voisinage de 0.

C-Ex 30: $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ a pour série de Taylor 0 en 0, et f n'est pas développable en série entière

2) Régularité des séries entières d'une variable complexe.

Thme 31: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.
$f : U \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en tout point ssi f est holomorphe.

Coro 32 Unicité des coefficients

App 33: Il est souvent plus pratique de chercher des solutions développables en série entière d'une équation différentielle

Ex 34: $y'' + y = 0$ a pour solutions
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} = \cos(x)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$

Déf 35: La fonction $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière en 0
et on définit les nombres de Bernouilli b_n par
$\forall z \in B(0, 2\pi)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$

Thme 36: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$

DEV 1

3) Propriétés des séries entières complexes

Thme 37: Principe des zéros isolés
Soit S la somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon R.
Si il existe $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de $B(0,R) \setminus \{0\}$ de limite 0 tel que $S(z_k) = 0 \ \forall k$, alors $S = 0$

Thme 38: Théorème de prolongement analytique
Soient S_1, S_2 les sommes de deux séries entières définies sur U_1 et U_2, disques ouverts de $\mathbb{C}$.
Alors si $\{z \in U_1 \cap U_2 \ / \ S_1(z) = S_2(z)\}$ admet un point d'accumulation, alors $S_1 = S_2$

Prop 39 : Formule de Cauchy
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R et de somme S
Alors $\forall r \in]0,R[, \forall n \in \mathbb{N}, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$

Thme 40 : Théorème de Liouville
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon ∞ et de somme S
Alors si $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bornée, S est constante

Prop 41 : Egalité de Parseval
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R et de somme S
Alors $\forall r \in]0,R[$, $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

III) Comportement au bord du disque de convergence

Rq 42 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \in]0,+\infty[$
Quitte à considérer $\sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{x}{R}\right)^n$, on peut supposer $R = 1$.

Déf 43 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon 1 et de somme S
On pose $\Gamma = \partial B(0,1)$
. $a \in \Gamma$ est dit régulier si il existe $r > 0$ tel que S admet un prolongement analytique sur $B(0,1) \cup B(a,r)$
On note A_r l'ensemble des points réguliers
. $a \in \Gamma$ est dit singulier si $a \notin A_r$
On note $A_s = \Gamma \setminus A_r$

Prop 44 : A_r est un ouvert de Γ, et A_s est fermé
Ex 45 : $\sum_{n\geq 0} z^n$. $A_r = \Gamma \setminus \{1\}$ et $A_s = \{1\}$
Thme 46 : $A_s \neq \emptyset$

Rq 47 : Cela ne signifie pas qu'il existe toujours un point du bord où la série ne converge pas
C-Ex 48 : $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge sur tout $\partial B(0,1) = \Gamma$

Déf 49 : Γ est une coupure si $A_r = \emptyset$

Thme 50 : Théorème des lacunes de Hadamard
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^{\lambda_n}$ une série entière de rayon 1
Alors Γ est une coupure. DEV 2

Ex 51 : Γ est une coupure pour $\sum_{n\geq 0} z^{\alpha^n}$

Références :
- Gourdon, Analyse
- Zuily - Queffélec, Analyse pour l'agrégation.
- Oraux X-ENS, Analyse 2.