(57) principe du maximum : Si Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique, alors si $|f|$ présente un maximum local en $z_0 \in \Omega$, f est constante sur Ω.

(58) ~~appli~~ en particulier, si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors $\forall 0 < r < R$, $\sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ est atteint sur le bord $\{z \in \mathbb{C} / |z| = r\}$

(58) application : Si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors

$$\sup_{|z| \leq 1} |P'(z)| \leq (\deg P) \left(\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| \right)$$

III Séries génératrices

a) application aux probabilités

(39) déf : Si X est une v.a.r à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $G_X : \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{D}}_1 \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=n) z^n \end{pmatrix}$: c'est une série entière de rayon de convergence au moins 1.

(40) rmq la fonction génératrice caractérise la loi ~~de $\mathbb{P}(X=n)$~~

(41) prop :
- $X \sim Ber(p) \Rightarrow G_X(z) = 1 - p + pz$
- $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow G_X(z) = (1-p+pz)^n$ $\quad (|z| < 1)$
- $X \sim Géom(p) \Rightarrow G_X(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$
- $X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$

(42) prop $\sum \mathbb{P}(X=n) z^n$ converge absolument sur $\overline{\mathbb{D}}_1$ et y définit une fonction continue.

(43) prop Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur $\mathring{\mathbb{D}}_1$

(44) application : Si $X \sim Poi\,\lambda$, $Y \sim Poi(\mu)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$.

(45) Si
- (X_n) est une suite iid à valeurs entières
- $N \perp\!\!\!\perp (X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

On pose $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Alors $G_Z(z) = G_N(G_{X_1}(z))$ $\quad (|z| < 1)$

b) une application en combinatoire

(46) Si $p(n)$ = nombre de partitions de $n \geq 0$, alors $\forall x \in]0,1[$, $\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$ et

$\exists K > 0, \forall n \geq 0, \quad p(n) \leq \exp(K\sqrt{n})$

IV Comportement au bord du disque

a) points singuliers

(47) Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors si $|z_0| = R$:
- z_0 est dit régulier si $\sum a_n z^n$ se prolonge analytiquement au voisinage de z_0
- z_0 est dit singulier sinon

(48) prop Il existe des points singuliers pour toute série entière

(49) rmq $\sum z^n/n^2$ converge absolument sur $\overline{\mathbb{D}}_1$

(50) $\sum z^{2^n}$: tous les points de $\mathbb{U}$ sont singuliers

b) Théorèmes d'Abel / Taubériens

(51) Théorème d'Abel : Si $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$, $R < +\infty$

On suppose $|z_0| = R$ et $\sum a_n z_0^n$ converge, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $\quad \rho \in [0, 2R\cos\varphi[$

et $\Delta(z_0, \rho, \varphi) = \left\{ z_0(1 - r e^{i\theta}) \Big/ \begin{matrix} 0 \leq r \leq \rho \\ |\theta| \leq \varphi \end{matrix} \right\}$

alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $\Delta(z_0, \rho, \varphi)$

en particulier $f(z) \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Delta(z_0,\rho,\varphi)}}{\longrightarrow} \sum a_n z_0^n$

(52) application : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$

(53) Un théorème Taubérien : si $\sum a_n x^n$ existe pour $x \in]-1,1[$ et $f \underset{1^-}{\to} \ell \in \mathbb{C}$, alors si
- $a_n \geq 0$ ou
- $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou
- $\sum n |a_n|^2 < +\infty$

ou $\sum_{k=1}^{n} k a_k = o(n)$, $\sum a_n = \ell$

22 **prop** Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors sa fonction somme est analytique sur $\mathring{D}_R$: plus précisément, si $z \in \mathring{D}_R$, alors $h \mapsto f(z+h)$ (où $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathring{D}_R$) s'exprime comme la somme d'une série entière en h avec rayon de convergence au moins égal à $R - |z|$

23 **prop** Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathring{D}_R$, ses dérivées étant données par $f^{(m)}(z) = \sum_{h\geq 0} (h+m)(h+m-1)\dots(m+1) a_{m+h} z^m$

$(z \in \mathring{D}_R$

b) relations coefficients / fonction somme

24 **prop** Si $\sum a_n z^n$ est une série entière convergente de somme f, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

25 **corollaire** unicité du développement en série entière sous réserve de convergence

25 bis $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ n'est pas somme d'une série entière au voisinage de 0

26 **prop** Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$ alors $\forall 0 < r < R$, $\forall n \geq 0$ $\quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

(f = fonction somme sur $\mathring{D}_R$)

27 **application** : sous les même hypothèses,
$$|f^{(m)}(0)| \leq \frac{m!}{r^m} \left(\sup_{|z|=r} |f(z)| \right)$$

28 **application 2** : si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence infini, et $f(z) = \underset{|z|\to\infty}{O}(e^{K|z|})$, $K > 0$ alors $a_n = \underset{n\to\infty}{O}\left((C/n)^n \right)$ pour un certain $n \geq 0$

28 bis **application** $\exists C_1, C_2 > 0, N \geq 0, \forall m \geq N, C_1 \left(\frac{m}{C_2}\right)^m \leq m! \leq m^m$

30 **application 3** : Théorème de Liouville
Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence infinie, et que sa fonction somme f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est en fait constante.

31 **application 4** sous les même notation, si $|f(z)| = \underset{z\to\infty}{O}(1+|z|^N)$ $(N \geq 0)$ alors f est un polynôme de degré au plus N.

32 **Théorème** (admis) Si Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, alors analytique

33 **Théorème** $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est analytique si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \delta, M, r \in \mathbb{R}_+^*, \forall m \geq 0, x \in]a-\delta, a+\delta[$:
$$|f^{(m)}(x)| \leq M n! \, r^m$$

34 Si Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f analytique sur Ω, ~~et que $\{z \in \Omega / f(z) = 0\}$~~ alors : ~~ses zéros sont isolés (si f est non nulle)~~

▷ si $\{z \in \Omega / f(z) = 0\}$ présente un point d'accumulation dans Ω, alors f est nulle (principe des zéros isolés)

35 **principe de prolongement analytique** :

~~Si $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ deux ouverts~~

Si Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g analytiques sur Ω alors si $f = g$ sur un ensemble présentant un point d'accumulation dans Ω, $f = g$ sur Ω.

36 **contre-exemples** : ▷ $\Omega = \mathring{D}_1 \sqcup \{z / |z-2| < 1\}$ et $f = 0$ sur $\mathring{D}_1$, $f(z) = 1$ si $|z-2| < 1 \Rightarrow f \neq 0$

▷ $\Omega = \mathbb{C}^*$, $f : z \mapsto \sin(\pi/z) \to f \neq 0$ or $\forall n$, $f(1/n) = 0$

243

Séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

I) Séries entières : convergence ~~et régularité~~

a) Lemme d'Abel

déf 1 Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ où $a\in\mathbb{C}$, $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. (elle est ici centrée en a.) On se ramène souvent en $a=0$ via $z\mapsto z-a$

ex 2 les polynômes, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ ...

déf 3 Une série entière est dite convergente si elle converge en un point différent de 0.

lemme d'Abel 4 Si $\sum a_n z^n$ est une série entière en 0, et $R=\sup\{r\geq 0 \ / \ (a_n r^n) \text{ bornée}\}$, alors $\forall r<R$, $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, et $\forall r>R$, $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement.

déf 5 si $\sum a_n z^n$ est une série entière, R son rayon de convergence :

- $\Delta=\{z\in\mathbb{C} \ / \sum a_n z^n \text{ converge}\}$ est appelé ensemble de convergence
- $\mathring{D}_R=\{z\in\mathbb{C} \ / \ |z|<R\}$ est appelé disque ouvert de convergence

on a $\Delta\subset\overline{D_R}=\{z\in\mathbb{C}/|z|\leq R\}$ et $\mathring{D}_R\subset\Delta$.

- Le cercle d'incertitude est $C_R=\{z\in\mathbb{C}/|z|=R\}$

ex 6 $\sum z^n$: $R=1$, $1\in\Delta$, $-1\notin\Delta$

$\sum z^n/n^2$: $R=1$, $\Delta=\overline{D_1}$

prop 7 Si $z\in\mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n$ est semi-convergente, alors $R=|z|$.

ex 8 Pour $\sum z^n/n$: $R=1$

b) Rayon de convergence

9 règle de d'Alembert : si $\exists N, \forall n\geq N, a_n\neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\lambda>0$ alors $R=\frac{1}{\lambda}$. Si $\lambda=0$, $R=+\infty$.

10 exemple : $\sum n^2 z^n$: $R=1$

11 formule de Cauchy-Hadamard : $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}$ (avec $\frac{1}{0}=+\infty$)

12 corollaire $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence

13 application : si $(p_n)_{n\geq 1}$ suite des nombres premiers (croissante), alors $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$ a pour rayon de convergence 1.

14 ex

- $\forall\alpha\in\mathbb{N}$, $\sum n^\alpha z^n$ a 1 pour rayon de convergence
- $\sum e^{n\sin n} z^n$ a pour rayon de convergence $1/e$

15 prop

- Si $a_n=O(b_n)$ ou $a_n=o(b_n)$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ ~~est~~ plus grand que celui de $\sum b_n z^n$
- Si $a_n\sim b_n$, ils sont égaux.
- Si à partir d'un certain rang $|a_n|\leq|b_n|$, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ ~~est~~ plus grand que celui de $\sum b_n z^n$.

16 ex : le rayon de convergence de $\sum \ln(1+\frac{1}{n})z^n$ est 1.

17 prop Si $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ ont pour rayon de convergence R_1 et R_2, alors $\sum (a_n+b_n)z^n$ a un rayon plus grand que $\min(R_1,R_2)$ avec égalité s'ils sont différents.

18 ex le rayon de convergence de $\sum (1+(-1))z^n$ est $+\infty$

19 prop avec les mêmes notation et $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $=(a*b)_n$ alors $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence plus grand que $\min(R_1,R_2)$, avec égalité si $R_1\neq R_2$

20 ex Si $a_n=1$ $\forall n$, $b_0=1$, $b_1=-1$, $b_n=0$ $\forall n\geq 2$ alors $c_n=1$ si $n=0$ et 0 sinon, et $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence infini.

II) Analyticité

a) régularité, analyticité

21 prop Si $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R, alors il y a convergence uniforme de la série sur tous les compacts de $\mathring{D}_R$. En particulier, la fonction somme est continue sur $\mathring{D}_R$.