243 — Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

déf 1: une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, avec $z\in\mathbb{C}$. les $a_n\in\mathbb{C}$ sont appelés coefficients de la série entière.

I / Convergence des séries entières

a) Rayon de convergence, disque de convergence

prop 2: (lemme d'Abel) soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. alors:

i) $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

ii) $\forall r\in\mathbb{R}_+$, $0<r<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans dans $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$.

déf 3: le nombre $R:=\sup\{r\geq 0, (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est appelé rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. ("RCV")

prop 4: soit $\sum a_n z^n$ de RCV R, alors:

i) $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

ii) $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|>R$, $\sum a_n z^n$ diverge

iii) $\forall r\in\mathbb{R}_+$, $0\leq r<R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$.

déf 5: pour $\sum a_n z^n$ de RCV R, le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

rq 6: les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, ont même rayon de convergence.

déf 7: soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de RCV $R>0$ et $R'>0$. notons f et g leur somme respective sur leur disque de convergence D et D'.

- la série entière $\sum c_n z^n$, $c_n := a_n+b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, est appelée somme des séries entières. son RCV vérifie $R''\geq \inf(R,R')$ et sur $D\cap D'$, $f+g$ est la somme de $\sum c_n z^n$.
- la série entière $\sum d_n z^n$, $d_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, est appelée produit de Cauchy des séries entières. son RCV vérifie $R'''\geq \inf(R,R')$ et sur $D\cap D'$, fg est la somme de $\sum d_n z^n$.

ex 8: les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur RCV égal à 1 mais le RCV de leur somme est ∞

rq 9: si $R\neq R'$, alors $R''=\min(R,R')$

b) Détermination du rayon de convergence

soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son RCV.

prop 10: (formule de Cauchy-Hadamard):
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

prop 11: (règle de d'Alembert) supposons $a_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ si $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$, avec $\lambda\in[0,\infty]$, alors $R=\frac{1}{\lambda}$.

ex 12: la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un RCV infini.

- la série entière $\sum 2^n z^n$ a un RCV égal à $\frac{1}{2}$.

rq 13: on ne peut pas toujours appliquer la règle de d'Alembert, par exemple pour $\sum z^{2n}$. la formule d'Hadamard nous donne son RCV égal à 1.

c) Comportement au bord du disque de convergence

th 14: (Abel angulaire) soit $\sum a_n z^n$ de RCV ≥ 1, tel que $\sum a_n$ converge. notons f la somme de la série entière sur le disque unité, soit $\theta_0\in[0,\pi/2[$, et $\Delta_{\theta_0} := \{z\in\mathbb{C}, |z|<1 \text{ et } \exists\rho>0, \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0] \text{ tq } z=1-\rho e^{i\theta}\}$ alors
$$f(z)\xrightarrow[\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}]{}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

DEV 1

th 15 : (Taubérien faible) soit $\sum a_n z^n$ de RCV $= 1$, notons f la somme de cette série sur le disque unité. on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$ alors, si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

---

ex 16 : • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \xrightarrow[\substack{z \to 1 \\ |z|<1}]{} \frac{1}{2}$ et $\sum (-1)^n$ diverge.

II / Etude de la somme d'une série entière

soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RCV $R>0$.
on note f sa somme sur son disque de convergence.

a) Régularité

th 17 : (continuité) $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence.

th 18 : (dérivabilité) $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$, et la série $\sum n a_n z^{n-1}$ a le même RCV que $\sum a_n z^n$. $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

cor 19 : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. de plus, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R,R[$ d'une série entière de RCV $R>0$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ donc

$$f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p \quad \forall z \in \mathbb{C},\ |z|<R.$$

ex 20 : la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour RCV $R>0$, et en notant F sa somme sur $\{z \in \mathbb{C}, |z|<R\}$, on a $F' = f$ sur $]-R,R[$.

th 21 : (holomorphie) f est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, |z|<R\}$.

b) Analycité

def 22 : soit g une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. on dit que f est developpable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum b_n z^n$ de RCV non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que $\forall z \in V$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$.

def 23 : on dit qu'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est analytique dans Ω si elle est developpable en série entière en tout point de Ω.

ex 24 : $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

th 25 : f est analytique sur le disque de convergence et $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0|<R$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z-z_0|<R-|z_0|$, on a $|z|<R$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$.

th 26 : (principe des zéros isolés) si il existe $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $z_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(z_p) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

csq 27 : si les sommes f et g de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient $f(z_p) = g(z_p)$ $\forall p \in \mathbb{N}$, où $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ alors $b_n = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

app 28 : (principe du prolongement analytique) soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

ex 29 : la fonction Γ d'Euler se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

th 30 : (formule de Cauchy)

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall r\in]0,R[$, $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$.

rq 31 : on retrouve $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$.
pour $z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0|\le r$.

cor 32 : (inégalité de Cauchy) $\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \le \frac{1}{r^n}\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$

th 33 : (Liouville) si g est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

prop 34 : (égalité de Parseval)
$\forall r\in]0,R[$, $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et on a
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$.

III / Développement en série entière

a) Fractions rationnelles

prop 35 : soit $p\in\mathbb{N}^*$, $z_0\in\mathbb{C}^*$. $z\mapsto \frac{1}{(z-z_0)^p}$ est développable en série entière sur $\{z\in\mathbb{C},\ |z|<|z_0|\}$:
$\frac{1}{(z-z_0)^p} = \frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!}\sum_{n=p-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$.

th 36 : toute fraction rationnelle complexe dont 0 n'est pas un pôle est développable en série entière son RCV est le plus petit des modules de ses pôles.

b) Cas général

def 37 : soit f une fonction définie indéfiniment dérivable dans un voisinage de 0. On appelle série de Mac-Laurin ou série de Taylor à l'origine de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$

th 38 : soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 admettant un développement en série entière en 0
i) il existe un voisinage de 0 sur lequel f est infiniment dérivable
ii) le développement en série entière de f à l'origine est son développement de Mac-Laurin

cor 39 : s'il existe, le développement en série entière à l'origine d'une fonction est unique.

c) Fonctions de la variable réelle

th 40 : une fonction f définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ est développable en série entière à l'origine ssi $\exists r>0$:
i) f est indéfiniment dérivable sur $]-r,r[$
ii) $\forall t\in]-r,r[$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$ admet 0 pour limite
si ces conditions sont vérifiées, f coïncide avec la somme de sa série de Mac-Laurin sur $]-r,r[$.

rq 41 : sous ces hypothèses, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral ; $\forall |t|<r$, $R_n(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du$.

contre ex 42 : $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

prop 43 : soient $r\in\mathbb{R}_+^*$, $f :]-r,r[\to\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable tq $\exists M>0$, $|f^{(p)}(t)|\le M$ $\forall t\in]-r,r[$ et $\forall p\in\mathbb{N}$. alors f est développable en série entière à l'origine.

ex 44 : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

th 45 : (Bernstein) soit $a>0$ et $f :]-a,a[\to\mathbb{R}$ C^∞ tq $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x)\ge 0$. alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

app 46 : tangente est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

DEV 2

d) Fonctions définies comme une somme de série entière

def 47 : sur $\mathbb{C}$, $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ (RCV ∞)

prop 48 : elles coïncident avec leur définition sur $\mathbb{R}$