NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 244 - Fonctions développables en séries entières, fonctions analytiques, exemples.

Autre sujet :

I] Fonctions analytiques réelles

1) Définitions.

[Cartan] Définition 1 : Une fonction f définie au voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ est développable en série entière en x_0 (DSE_{x_0}) s'il existe $\alpha>0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n, \ \forall x \in]x_0-\alpha ; x_0+\alpha[$$

Exemple 2 *) sin est DSE_0 *) $|.|$ n'est pas DSE_0

Propriété 3 *) si f est DSE_{x_0}, f est $\mathcal{C}^\infty$ en x_0 et $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

*) si f, g sont DSE_{x_0}, $f+g$ est DSE_{x_0}, fg est DSE_{x_0}.

Définition 4 Si I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. f est dite analytique sur I si elle est DSE_x pour tout $x\in I$.

Exemple 5 *) sin est analytique sur $\mathbb{R}$, les polynômes aussi *) si P un polynôme ne s'annulant pas sur I, $1/P$ est analytique sur I.

[OA] Remarque 6 Si f analytique sur I s'annulant en $x_0\in I$ sur un voisinage de x_0 : $f(x) = \sum_{k=p} a_k (x-x_0)^k$ avec $a_p\neq 0$ (on dit x_0 est un zéro d'ordre p de f) est $f=(x-x_0)^p g$ avec g analytique sur I, $g(x_0)\neq 0$.

Exemple 7 *) sin admet un zéro d'ordre 1 en 0 et $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

Propriété 8 Si f, g analytiques sur I, fg et $f+g$ aussi, toute primitive ou dérivée k-ième de f, $k\in\mathbb{N}$, est analytique sur I.

Application 8 $\frac{1}{1+x^2}$ analytique sur $\mathbb{R}$ donc arctan aussi.

Théorème 9 Si f DSE_{x_0} de rayon de convergence ρ, alors f analytique sur $]x_0-\rho ; x_0+\rho[$.

2) Propriétés des fonctions analytiques

Théorème 10 : Formule de Taylor avec reste intégral : si $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $a<b$, et si f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a;b]$, alors $\forall k\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{f(b) = f(a) + \sum_{p=1}^{k} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b-a)^p + \frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt}$$

Application 11 Thm de Bernstein : si $a>0$, f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[-a;a]$ dans $\mathbb{R}$, si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $[-a;a]$, alors f est analytique sur $]-a;a[$.

Exemple 12 $1+\tan^2$ est analytique, d'où tan est analytique sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Théorème 13 Si f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f est analytique sur I ssi $\forall x_0 \in I$, $\exists V$ voisinage de x_0 tq $\exists M$ et r finis strictement positifs tels que $\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M r^p \ \forall x\in V, \forall p\geq 0$.

Remarque 14 En pratique on prouve que le reste de Taylor tend vers 0 pour prouver l'analyticité. Le théorème illustre cependant le contrôle des dérivées successives des fonctions analytiques (cf 3)).

Théorème 15 Si f analytique sur I intervalle de $\mathbb{R}$, si $x_0\in I$

(i) $f^{(n)}(x_0) = 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) f est nulle au voisinage de x_0

(iii) f est nulle sur I

sont équivalents.

C-exemple : $x \mapsto e^{-x^2}$ non DSE_0

Unicité du

Application 17 : Prolongement analytique d'une fonction analytique sur un ouvert convexe.

Proposition 18 Si f analytique sur I ouvert convexe, alors soit f est nulle, soit les zéros de f sont isolés.

Application 19 Thm de prolongement analytique : si f, g analytiques sur I, égales sur un ensemble avec point d'accumulation alors $f = g$ sur I.

[O A] Exemple 20 $\sin \frac{\pi}{x}$ s'annule en $\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et est analytique sur $]0, 1[$.

Remarque 21 : Une fonction analytique a au plus un nb fini de zéros sur un compact.

[OA] 3) Fonctions analytiques et fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exemple 21 : $x \mapsto 1_{x>0}\, e^{-x^{-2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ non analytique

Thm 22 Si U un ouvert, F un compact, $F \subset U$, il existe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f_{|U^c} = 0$, $f_{|F} = 1$.

Thm 23 Lemme de Borel : $\forall (a_n)$ suite de $\mathbb{R}$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Remarque 24 Contraste avec le principe des zéros isolés et le contrôle des dérivées des fonctions analytiques.

II) Fonctions holomorphes : analycité sur $\mathbb{C}$

[POM] 1) Définitions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$

Définition 25 f est holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exemple 26 $\frac{1}{1+z}$, exp, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n (-1)^{n-1}}{n}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\mathbb{C}$, et $D(0,1)$

* f analytique sur $\Omega \Rightarrow f$ holomorphe sur Ω.

Théorème 27 Si f holomorphe sur Ω convexe, si $z \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ avec $D(z, \varepsilon) \subset \Omega$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw .$$

Application 28 f holomorphe sur $\Omega \Leftrightarrow f$ analytique sur Ω

Contre exemple 29 $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \arg z$ n'est pas analytique

2) Propriété [POM]

Théorème 30 Si f analytique non nulle sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble des zéros de f est un ensemble de points isolés.

Application 31 Prolongement analytique holomorphe.

Application 32 : Singularité au bord. Si $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence fini ($=1$) si $a \in S^1$, a est dit régulier si f admet un prolongement analytique sur $D(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, sinon, a est dit singulier pour la série entière.

Théorème : Sous ces conditions, $\sum a_n z^n$ admet un point singulier sur S^1.

Exemple 33 $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ non prolongeable en -1.

Définition 34 Si Ω ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$

* si f se prolonge en z_0, z_0 est dite singularité éliminable.

* si tel que il existe $N \in \mathbb{N}^*$ avec $f \times (z - z_0)^N$ prolongeable en z_0, non nulle en z_0, alors z_0 est dit pôle de f d'ordre N.

Exemple 35 : $\frac{1}{\sin z}$ admet un pôle d'ordre 1 en 0.

Thm / Déf 36 : Si f admet en z_0 un pôle d'ordre N, alors au voisinage de z_0, f s'écrit $f(z) = \sum_{n=-N} a_n (z - z_0)^n$.

le coefficient d'ordre -1 est appelé résidu de f en z_0, noté $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$

Exemple 37 $\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{\sin}\right) = 1$

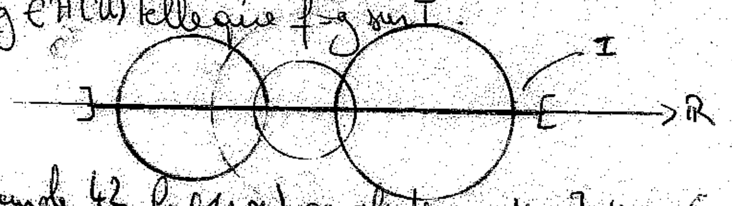
Théorème 38 Théorème des résidus : Si S l'ensemble des pôles de f sur Ω, si γ un lacet sur Ω et P "l'intérieur du lacet", alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{s\in S\cap P} \mathrm{Res}_s(f)\cdot \mathrm{Ind}_s(\gamma)$.

Application 39 Calculs d'intégrales.

[Cartan] → Exemple 40 *) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ *) si $a>1$, $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

3) Analyticité réelle ou complexe

Théorème 41 Toute fonction analytique réelle sur I intervalle de $\mathbb{R}$, il existe U ouvert de $\mathbb{C}$ contenant I, $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f=g$ sur I.



Exemple 42 $\ln(1+x)$ analytique sur $]-1;+\infty[$ se prolonge sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty;-1]$.

III) Problèmes de prolongement

1) Difficultés à prolonger

But : si f DSE$_{z_0}$ de rayon de convergence égal à R, peut-on prolonger cette écriture sur le cercle $C(z_0,R)$?

Exple 43 $\ln(1+z)$ ne se prolonge pas en -1 mais en 1 oui !

DEV 1 (Zu) Théorème 44 Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de conv. égal à 1, alors il existe une série entière $\sum b_n z^n$ avec $\forall n\in\mathbb{N}$ $|b_n| = |a_n|$ et telle que l'ensemble des points réguliers sur le cercle $C(0,1)$ soit de mesure nulle.

2) Thm de prolongements [GOU]

Théorème 45 : (Théorème Taubérien faible) si $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur $D(0,1)$, tels que $\exists S\in\mathbb{C}$ avec $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = S$, si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge de somme S.

Ce théorème est une réciproque partielle de :

Théorème 46 (Abel angulaire) si $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon ≥ 1, telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur $D(0,1)$. Si $\theta_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et si $\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C},\ |z|<1$ et $\exists \rho>0,\ \exists\theta\in[-\theta_0;\theta_0],\ z = 1-\rho e^{i\theta}\}$ alors $\lim_{z\to 1, z\in\Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$

Exemple 47 : $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1, x<1}\sum_{n\geq 0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Théorème 48 (Hardy Littlewood) : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tq $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Si $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n\geq 0} b_n x^n = \ell$, alors $\sum b_n$ converge, de somme ℓ.

IV) Résolution d'équations différentielles

Théorème 49 Si p,q deux fonctions analytiques de I dans $\mathbb{R}$, les solutions de $y''+py'+qy=0$ sont analytiques sur I. [ZQ]

[DEV 2] Exemple 50 équation de Bessel d'ordre 0 : [FGN analyse 1]

(E) : $xy''+y'+xy = 0$. Les solutions sont analytiques sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mais il existe une solution (donc une droite vectorielle de solutions) qui sont DSE$_0$.

Henri Cartan : "Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes", Chap 1, §4.
Objectif agrégation, 2.2.
POMMELET, "Cours d'analyse".
Zuily Queffélec.
, GOURDON ANALYSE
, Oraux X-ens Analyse 4 (FGN).