244

fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

I) fonction réel-analytique [ZQ]

1) définitions et premières propriétés

def 1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compact. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique
(i) $f \in C^\infty(\Omega)$ (ii) $\forall K \subset \Omega$ compact. $\exists A, B > 0$
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $\|\partial^\alpha f\|_{\infty,K} \leq A \cdot B^{|\alpha|} \alpha!$
on note alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Ex : * sin, cos, exp $\in \mathcal{A}(\Omega)$
* $x \mapsto (1+x)^{-1} \in \mathcal{A}(]-1,+\infty[)$ * $\mathbb{C}[X_1,..X_n] \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{itx} a(t)\,dt$ * si $a(t) \in C^0(\mathbb{R}_+)$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $|a(t)| \leq C e^{-t}$ alors $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

si $a(t) = e^{-\sqrt{t}}$ alors $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

thm 2 : $\exists f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $\forall V \subset \Omega$, $f \notin \mathcal{A}(V)$. [RR]

prop 3 : * $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre
* si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$, $f(x) \neq 0$ alors $1/f \in \mathcal{A}(\Omega)$
* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ alors $\partial^\alpha f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
* $\Omega \subset \mathbb{R}$. si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, ses primitives aussi
* si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. $F \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, alors $F \circ f \in \mathcal{A}(\Omega)$

appli : $x \mapsto 1/1+x^2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, arctan $\in \mathcal{A}(\mathbb{R})$

2) fonctions développables en série entière

def 4 : une série de fonctions $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x-x_0)^\alpha$ est appelé série entière

$D = \{x \in \mathbb{R}^n, |\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha| < +\infty\}$
$R := \sup\{|x|, x \in D\}$ est le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x-x_0)^\alpha$ (RDC de S)

Ex : exp, cos, sin : RDC $= +\infty$
$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n}$ RDC $= 1$.

prop 5 : Soit f une série entière de RDC R en x_0.
(i) f est C^∞ sur $B(x_0, R)$ (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha f(x_0) = \alpha! a_\alpha$

def 6 : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \Omega$
f est dite développable en série entière au voisinage de x_0 (DSE_{x_0}) si $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$, $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ tq $\forall x \in V \cap \Omega$, $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x-x_0)^\alpha$.

Ex : $\ln(1+x)$, $1/(1+x)$, arctan, tan en 0.

thm 7 : $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ($f \in \mathcal{A}(\Omega)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \Omega$ f est DSE_x)

thm 8 : $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = a_n$ [Gou]

appli : $a_n = (n!)^2$ donne $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ non DSE₀

thm 9 : $a > 0$, $I =]-a,a[$, $f \in C^\infty(I)$ tel que $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(2k)}(x) \geq 0$. alors f est DSE sur I [DIP, Gou]

prop 10 : Soit $f \not\equiv 0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Les zéros de f sont isolés contre ex : $(x,y) \mapsto x-y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$.

prop 11 : Soit $f \in \mathcal{A}(I)$, $x_0 \in I$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

(i) $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(x_0) = 0$
(ii) f est nulle au $\mathcal{V}(x_0)$
(iii) f est nulle sur I

sont équivalentes.

contre Ex : $g : x \mapsto e^{-1/x^2}$ sur $]-1,1[$ vérifie (i) mais pas (ii)

donc $g \notin \mathcal{A}(]-1,1[)$.

II fonctions holomorphes. analycité complexe.

[POM]

def 12 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable

On note alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ex : $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. $z \mapsto 1/z \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

contre Ex : Re, Im ne sont pas holomorphes

def 13 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-analytique si $\forall z \in \Omega$, f est DSE$_z$ (on prolonge def 6 pour $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$)

on note alors $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\Omega)$.

Rq : $(x,y) \mapsto x-y \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ mais $\notin \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.

thm 15 : $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$

prop 16 : Soit $f \not\equiv 0 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Les zéros de f sont isolés.

def 17 : Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0$

il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(z_0) \neq 0$

et $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$.

z_0 est appelé zéro d'ordre k de f.

def 18 : Soient $z_0 \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

→ si f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ z_0 est dite singularité illusoire de f.

→ si $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $g(z) = f(z)(z-z_0)^k$ se prolonge en $\tilde{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\tilde{g}(z_0) \neq 0$, z_0 est appelé pôle d'ordre k de f.

Ex : $1/\sin z$ admet un pôle d'ordre 1 en 0.

thm 19 : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ admet un pôle d'ordre N en $z_0 \in \Omega$. alors $f(z) = \sum_{k=-N}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ $a_k \in \mathbb{C}$.

a_{-1} est appelé le résidu de f en z_0

thm 20 : Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P)$ où P est un ensemble fini de pôles de f. Soit γ un lacet de Ω ne rencontrant pas P. I son intérieur.

alors $\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{z \in I \cap P} \operatorname{res}_f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z)$

appli : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$

III problèmes de prolongements

1) prolongements analytiques [ZQ]

prop 21 : il y a unicité du prolongement analytique sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

thm 22 : Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{A}(I)$ telque $f = g$ sur $J \subset I$ et J admet un point d'accumulation alors $f = g$.

prop 23 : si $f \in \mathcal{A}(I)$, $\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, $I \subset \mathcal{U}$ et $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ telque $g_{|I} = f$.

def 24 : Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(B(0,\rho))$ $0<\rho<+\infty$. Pour $a \in S(0,\rho)$,
→ Si f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{H}(B(0,\rho)\cup B(a,r))$ $r>0$ a est dit régulier
→ sinon a est dit singulier.

thm 25 : Si $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de RDC $0<\rho<+\infty$ f admet au moins un point singulier sur $S(0,\rho)$.

Ex : $\ln(1+z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ sur $B(0,1)$ ne se prolonge pas en -1

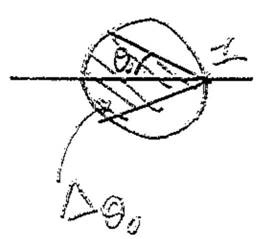
2) Théorèmes de prolongement au bord [Gou]

thm 26 : théorème taubérien faible
Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de RDC 1.
si $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe et si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

thm 27 : théorème taubérien de Hardy - Littlewood. DVP
le théorème 26 est vrai en supposant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

appli : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

thm 28 : théorème d'Abel Angulaire.
Si $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de RDC $=1$. Si $\sum a_n$ cv.
pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$
alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$



[Gou] : maths en tête, analyse de X. Gourdon
[ZQ] : éléments d'analyse pour l'agrégation par C. Zuily et H. Queffélec.
[Pom] : Cours d'analyse de A. Pommellet.

Développement : le théorème de Bernstein pour les séries entières

Romain Demarly et Hugo Martin

3 décembre 2014

Theorème 1

Soient $a > 0$, $I =]-a, a[$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(2k)}(x) \geqslant 0$. Alors f est développable en série entière sur I.

Démonstration : *Remarque* Il suffit de montrer le résultat sur un intervalle $]-b, b[$ avec $b \in]0, a[$ quelconque. Fixons donc un tel b.

On va commencer par montrer le résultat pour la fonction $F : x \mapsto f(x) + f(-x)$.

On remarque que F est paire, donc d'une part, il suffit de prouver le résultat sur $[0, b[$, et d'autre part, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à $x \in [0, b]$, on obtient :

$$F(x) = F(0) + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Comme $F^{(2n)}(x) \geqslant 0$, la formule précédente entraine $F(b) \geqslant R_n(b)$ pour tout n. Pour montrer que F est développable en série entière sur $[0, b[$, il faut montrer que $R_n(x)$ tend vers 0 en n. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(b-t)^{2n+1}} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b) \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé la décroissante sur $[0, b]$ de $t \mapsto \frac{x-t}{b-t}$. Le résultat est donc prouvé pour F. Montrons-le maintenant pour f.

Écrivons la formule de Taylor à l'ordre $2n+1$ pour f en $x \in]-b, b[$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t}_{r_n(x)}$$

Comme $0 \leqslant f^{(2n+2)}(t) \leqslant f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t) = F^{(2n+2)}(t)$ pour tout t, on a $|r_n(x)| \leqslant R_n(|x|)$ [1], donc $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$. Ainsi, en notant

$$\forall p \in \mathbb{N} S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$$

nous venons de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = f(x).$$

Or

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = \frac{1}{2} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = 0,$$

et on en déduit évidemment que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = f(x).$$

On a ainsi prouvé que $\lim_{n\to+\infty} S_n = f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-b, b[, \_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

D'où le résultat. ■

Bonus : La dérivée de la fonction tangente définie de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{B}$ vérifie les hypothèses du théorème, et on en déduit que tan est développable en série entière sur cet intervalle.

1. Pour s'en convaincre, un simple changement de variable suffit.

Développement : le théorème taubérien fort d'Hardy-Littlewood

Romain Demarly et Hugo Martin

3 décembre 2014

Référence : Gourdon, les maths en têtes, Analyse, 2ème édition, pp 289-290

Les théorèmes taubériens fournissent une réciproque partielle au théorème d'Abel, qui est un résultat de prolongement de séries entières définies sur le disque unité en 1.

Theorème 1 ***(d'Hardy-Littlewood)***

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = O(\frac{1}{n})$ lorsque $n \to +\infty$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a rayon de convergence $\geqslant 1$ et que sa somme F vérifie $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = l$. Alors $\sum a_n$ converge et sa somme vaut l.

Remarque préliminaire : on va montrer le résultat pour une suite a_n telle que $l = 0$. Le cas général s'en déduit en posant $b_0 = a_0 + l$ et $\forall n \geqslant 1, b_n = a_n$.

On commence par introduire l'ensemble Φ des fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que :

1. pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum a_n \varphi(x^n)$ converge;
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0$

Objectif Montrer que la fonction $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ est dans Φ, ce qui permettra de passer à la limite en x, et donnera le résultat.

Pour cela, on montrera trois lemmes préliminaires.

Lemme 1

Toute fonction polynôme nulle en 0 est dans Φ.

Démonstration : On montre le résultat pour un monôme non constant, et la linéarité de la somme donnera le résultat général.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $q : x \mapsto x^k$. Si $x \in [0,1]$, alors x^k également, et par hypothèse sur la suite $(a_n)_n$, $\sum a_n (x^k)^n$ converge. De plus $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) = F(x^k)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) = 0$. ■

Lemme 2

Pour une fonction polynôme q,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Toujours par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour un monôme. Soient donc $k, N \in \mathbb{N}$ et $q : x \mapsto x^k$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} x^n q(x^n) &= \sum_{n=0}^{N} x^{(k+1)n} \\ &= \frac{1 - x^{(k+1)(N+1)}}{1 - x^{(k+1)}}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n) &= (1-x)\frac{1}{1 - x^{(k+1)}} \\ &= \frac{1}{1 + x + \cdots x^k}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n) &= \frac{1}{k+1} \\ &= \int_0^1 q(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

■

Lemme 3

Soit $\epsilon > 0$. Il existe deux fonctions polynômiales p_1 et p_2 tels que :

1. $p_1(0) = p_2(0) = 0$ *et* $p_1(1) = p_2(1) = 1$
2. $p_1 \leqslant g \leqslant p_2$
3. $\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t < \epsilon$ avec $q(t) = \frac{p_2(t) - p_1(t)}{t(1-t)}$

Démonstration : Posons $h : x \mapsto \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$. Pour $\epsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que $s_1 \leqslant h \leqslant s_2$ et $\int_0^1 s_2(t) - s_1(t)\mathrm{d}t < \epsilon$. On applique alors le théorème d'approximation de Weierstrass. Soient alors t_1 et t_2 les polynômes d'approximation à ϵ près. Posons ensuite $h_1 = t_1 - \epsilon$ et $h_s = t_2 + \epsilon$. On vérifie : $h_1 < s_1 \leqslant h \leqslant s_2 < h_2$. Posons enfin : $p_i(x) = x + x(1-x)h_i(x)$, qui vérifient bien évidemment la première contrainte, et la deuxième grâce à l'inégalité précédente. Enfin,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{p_2(t) - p_1(t)}{t(1-t)}\mathrm{d}t &= \int_0^1 h_2(t) - h_1(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t_2(t) - t_1(t)\mathrm{d}t + 2\epsilon \\ &< \int_0^1 s_2(t) - s_1(t)\mathrm{d}t + 4\epsilon \\ &< 5\epsilon\end{aligned}$$

■

Nous sommes alors en mesure de montrer que g est un élément de Φ.

Démonstration du théorème : Posons N_x la partie entière de $\frac{-\ln(2)}{\ln(x)}$. Pour $n \leqslant N_x$, $g(x^n) = 0$, donc la série $\sum a_n g(x^n)$ est en fait une somme finie, donc converge. Montrons maintenant le deuxième point. C'est précisément pour ce point délicat que tous les lemmes interviennent. On a $p_1 \leqslant g \leqslant p_2$, donc $0 \leqslant g - p_1 \leqslant p_2 - p_1$. Soit M un réel positif tel que $|a_n| \leqslant \frac{M}{n}$ (car $a_n = O(\frac{1}{n})$ en $+\infty$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(g(x^n) - p_1(x^n))\right| &\leqslant \frac{M}{n}\sum_{n=0}^{\infty}(g(x^n) - p_1(x^n)) \\ &\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(p_2(x^n) - p_1(x^n)) \\ &\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n(1-x^n)q(x^n) \\ &\leqslant M(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n q(x^n)\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé $1 + x^n \leqslant n(1+x)$ pour $|x| < 1$ pour la dernière inégalité.

Or q est une fonction polynomiale, donc d'après le lemme 2 et les contraintes imposées à p_1 et p_2, pour tout $\epsilon > 0$, il existe X tel que pour tout $x > X$, $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(g(x^n) - p_1(x^n))\right| \leqslant M\left(\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t + \epsilon\right) < 2M\epsilon$.

D'autre part, p_1 étant polynomiale, pour tout $\epsilon > 0$, il existe X_1 positif tel que pour tout $x > X_1$, $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n)\right| < \epsilon$.

Pour $x > max(X, X_1)$, on a donc :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(g(x^n) - p_1(x^n))\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n)\right| \leqslant (2M+1)\epsilon$$

On vient donc de montrer que g appartient Φ.

On écrit enfin :

$$0 = \lim_{x\to 1^-} \Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \lim_{x\to 1^-} \Sigma_{n=0}^{N_x} a_n g(x^n) = \Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Le résultat est donc prouvé. ■