244

fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples

On s'intéresse dans cette leçon aux fonctions d'une variable réelle ou complexe. I désignera un ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et U un ouvert de K.

I) Séries entières

1) Généralités

[ZQ] Définition 1: une série entière de variable réelle (ou complexe) est une série de fonctions de la forme $z \mapsto \sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients de la série entière.

[ZQ] Définition 2: On définit le rayon de convergence d'une série entière par $R := \sup\{r \geq 0,\ (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée}\}$

Exemple: $\sum z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1

[ZQ] Lemme d'Abel: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, soit $0 \leq r < R$. Alors la somme f de la série entière, soit $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, converge normalement sur $[-r, r]$ (variable réelle), sur $D(0,r)$ (variable complexe). Pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

2) Dérivation des séries entières

[P] Proposition 3: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme f, soit $p \in \mathbb{N}$. La série dérivée d'ordre p de f, définie par $\sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$, a le même rayon de convergence que f

Exemple: $\sum \frac{(n+p)!}{n!}$ a pour rayon de convergence 1.

[P] Proposition 4: La somme f d'une série entière de variable réelle (resp. complexe) est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ (resp holomorphe sur $D(0,R)$). De plus, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme de la série dérivée de f d'ordre p.

Corollaire 5: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

II) Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques

1) Définition et premières propriétés

Définition 6: On dit que la fonction f de l'ouvert U de K dans $\mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage du point z_0 de U s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et $r > 0$ tel que pour tout z de $D(z_0, r)$, [P]

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Définition 7: Une fonction f est dite analytique si elle est développable en série entière en tout point de U. [P]

exemple: toute fonction polynômiale est analytique sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

remarque 8: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique de variable complexe, alors $f_{|\Omega \cap \mathbb{R}}$ est analytique de variable réelle.

Proposition 9: D'après la proposition 4, une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ d'une variable réelle est $\mathcal{C}^\infty$, d'une variable complexe est holomorphe sur U. Au voisinage de tout point z_0 de U, on a: [P]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

remarque 10: On verra qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de variable réelle n'est pas nécessairement analytique, mais qu'une fonction holomorphe est toujours analytique.

Proposition 11: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme f. Alors f est analytique sur son disque de convergence. Plus précisément, $\forall |z_0| < R$, $\forall z$ tel que $|z - z_0| < R - |z_0|$, [P]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

2) Analyticité réelle

[P] Proposition 12 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, soit $x_0 \in I$. Alors f est développable en série entière en x_0 si et seulement si le reste de la série de Taylor $R_n(x) := f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ converge simplement vers 0 au voisinage de x_0 lorsque $n \to +\infty$.

[P] remarque importante : Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on peut ~~savoir~~ la convergence de la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ vers autre chose que $f(x)$. Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pourtant, $\forall x > 0$, on a $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

f n'est donc pas développable en série entière en 0.

Lemme de Bernstein : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f $\mathcal{C}^\infty$ sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$. Alors f est analytique sur I.

[C] Proposition 14 : Soit f $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que tout point $x_0 \in I$ possède un voisinage V tel que : $\exists M, \alpha > 0, \forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\right| \leq M\alpha^n$. Alors f est analytique sur I.

remarque 15 : on verra que la réciproque est vraie.

3) Exemples de fonctions analytiques :

Les fonctions suivantes sont analytiques sur leur ensemble de définition. On donnera leur développement en série entière en 0. x désignera une variable réelle, z une variable complexe.

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall |z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ [P]
- $\forall |z| < 1, \forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$
- $\forall |x| < 1$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- $\forall |x| < 1$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\forall |x| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

Proposition 16 : Soit F une fraction rationnelle de pôles complexes $z_1, \ldots, z_n$. Si 0 n'est pas pôle de F, la fonction F admet un développement en série entière en 0, de rayon de convergence $= \min\{|z_i|, i \in [\![1,n]\!]\}$. (On peut utiliser la décomposition en éléments simples pour trouver les coefficients). [P]

III) Analyticité et holomorphie

1) Formules de Cauchy

On rappelle la formule intégrale de Cauchy. Soit f une application holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors $\forall a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, en désignant par Γ le bord orienté de $D(a,r)$, on a :

$$\forall z \in D(a,r),\ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\, du \quad [P]$$

Cette formule permet de démontrer le résultat suivant :

[P],[ZQ] **Théorème 17** : (formules de Cauchy). Avec les notations précédentes, f est analytique sur Ω, et $\forall z \in D(a,r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \text{ où } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}du$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

[ZQ] **Corollaire** : inégalités de Cauchy. Sous les mêmes hypothèses, on a $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, où $M(r) := \sup_{|z-a|=R} |f(z)|$

[P] DV1 **Théorème de Paley-Wiener**

2) Prolongement analytique

[ZQ] **Proposition 18**. Soit f analytique sur U ouvert connexe de $\mathbb{K}$. Alors il y a équivalence entre
- $\exists z_0 \in U$ tel que $f^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$
- $f \equiv 0$ sur U.

[ZQ] **Corollaire 19** : Les zéros d'une fonction analytique non nulle sont isolés.

[ZQ] **Proposition 20** (prolongement analytique). Soit f, g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe U. Si $\{z \in U, f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans U, alors $f = g$ sur U.

[ZQ] **Corollaire 21** : Si f est analytique réelle sur I, alors il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant I et g holomorphe sur Ω telle que $g_{|I} = f$.

exemple (détermination principale du logarithme).
$\mathrm{Log}(z) := \int_{[1,z]} \frac{1}{u}du$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et vérifie $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$.

3) Stabilités des fonctions analytiques

D'après ce qui précède, on a facilement :

Proposition 22 : La somme, le produit, la composition de deux fonctions analytiques est analytique. Si f est analytique sur U, $\frac{1}{f}$ est analytique sur $U\setminus\{z, f(z)=0\}$

IV) Utilisation des fonctions développables en série entière

Méthode générale : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes inconnus, on peut étudier la série $\sum a_n z^n$ (ou $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$) pour avoir des informations sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle (comme par exemple $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$) on peut chercher si elle possède des solutions développables en série entière, trouver ses coefficients en dérivant terme à terme puis s'assurer que son rayon de convergence est >0. [ZQ]

2) Probabilité

[T] DV2 exemple (Galton-Watson) : Étude de la probabilité qu'un nom de famille "survive".

3) Dénombrement :

Calcul du n-ième nombre de Bell $q_n := \#\{$partition d'un ensemble à n éléments$\}$.
On peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ [P]

références:

[ZQ]: Zuily-Quéffélec, Analyse pour l'agrégation

[P]: Pommelet, Cours d'analyse

[C]: Cartan, théorie élémentaire des fonctions analytiques

[T] Toulouse, thèmes de probabilités et statistiques

[R] Rudin

Processus de Galton-Watson

Thibaut Tardieu - Bilal Ghamit

10 Novembre 2015

Il s'agit ici d'étudier la probabilité qu'un nom de famille 'survive' au fil des générations. On part de la génération 0 où un seul homme possède le nom de famille étudié, et la $n+1$-ème génération est constituée des hommes issus de la n-ème génération. Le nombre d'enfants de chaque homme suit une variable aléatoire, et on suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi X. La probabilité qu'un homme ait k enfants est notée p_k et on suppose enfin $0 < p_0 < 1$.

On note m l'espérance de X, Z_n le nombre d'hommes de la n-ème génération, $x_n = \mathbb{P}\{Z_n = 0\}$ la probabilité que le nom de famille disparaisse à la n-ème génération. Enfin on pose $G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \Sigma p_n s^n$ la fonction génératrice de X.

Théorème. *Avec les notations ci-dessus, si $m \leq 1$, le nom de famille s'éteindra presque sûrement, et si $m > 1$, le nom de famille a une probabilité de survie non nulle.*

Preuve. On appelle A l'évènement où le nom de famille disparait. Alors $A = \cup\{Z_n = 0\}$ et cette réunion est croissante. De là, $\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim x_n$.

On a ensuite $Z_{n+1} = X_1 + \ldots + X_n$ et de là

$$\begin{aligned}
G_{Z_{n+1}}(s) &= \mathbb{E}\left(\sum_k \mathbb{1}_{Z_n=k} s^{X_1+\ldots+X_{Z_n}}\right) \\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z_n=k} s^{X_1+\ldots+X_{Z_n}}\right) \\
&= \sum_k \mathbb{P}(Z_n = k)\mathbb{E}(s^X)^n \\
&= G_{Z_n}(G(s))
\end{aligned}$$

et par une récurrence immédiate, la fonction génératrice de Z_n est $G \circ \ldots \circ G = G^n$.

On peut clairement dériver G sur $[0,1]$ et on a, pour tout $x \in [0,1]$, $G'(x) = \Sigma p_n n x^{n-1}$ et $G" = \Sigma p_n n(n-1)x^{n-2}$. Comme $p_0 < 1$, au moins un des p_n avec $n > 1$ est non nul et de là G' est strictement positive sur $]0,1]$ et est donc strictement croissante sur $[0,1]$, et $G" \geq 0$ entraine que G est convexe. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $G(s) = p_0 + p_1 s$ et sinon, G est strictement convexe sur $]0,1[$.

On étudie maintenant la suite (x_n). Comme $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, la suite (x_n) est croissante, et elle est majorée (par 1) : il existe donc $l \in [0,1]$ tel que $\lim x_n = l$. De plus, $x_n = G_{Z_n}(0) = G \circ G^{n-1}(0) = G(x_{n-1})$. Par continuité de G sur $[0,1]$, on en déduit que $l = G(l)$. Par croissance de G, l est alors le plus petit point fixe dans $[0,1]$ de G (si y est un tel autre point fixe, on a par stricte croissance de G $x_n = G^n(0) < G^n(y) = y$ et par passage à la limite $l \leq y$).

Enfin, on a $m = \mathbb{E}(X) = G'(1)$. Donc si $m > 1$, alors il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $G(\alpha) < \alpha$ et donc comme $G(0) = p_0 > 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in]0, \alpha[$ tel que $G(x) = x$. Comme $G'(1) > 1$, G n'est pas affine ($G'(0) = p_1 < 1$) et donc G est strictement convexe : G ne peut alors avoir qu'un seul point fixe dans $]0,1[$, et de là $l = x$. Il y a donc une probabilité $l > 0$ que le nom de famille disparaisse, et une probabilite $1 - l > 0$ qu'il ne s'éteigne pas.

Si $m < 1$, et si x est un point fixe de G, par convexité de G, $x = G(x) \geq m(x-1) + 1$ et donc $x(1-m) \geq (1-m)$ et de là $x \geq 1$. Comme $G(1) = 1$, on en déduit que $l = 1$ et donc le nom de famille disparait presque sûrement.

Si $m = 1$, et s'il existait un point fixe de g x dans $]0,1[$, alors $G(y) = y$ pour tout $y \in [x, 1]$: en effet, la demi-tangente à la courbe de G en 1 est alors au-dessous de la courbe de G, et par convexité de G, la courbe de G est en-dessous de la courbe de Id entre x et 1 Par croissance de G, on en déduit que G et Id coïncident sur $[x, 1]$. De là, par prolongement analytique, $G = Id$ et donc $p_0 = 0$: absurde. Donc le seul point fixe de G dans $[0,1]$ est 1 et donc le nom de famille s'éteint presque sûrement.

Théorème de Paley-Wiener

Thibaut Tardieu - Bilal Ghamit

10 Novembre 2015

Théorème. *On note Π^+ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \; Im(z) > 0\}$. Soit f une fonction définie sur Π^+ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a équivalence entre :*

(1) f est holomorphe sur $\Pi+$ et

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx = C < +\infty$$

(2) Il existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que F soit nulle presque partout sur $]-\infty, 0[$ et

$$\forall z \in \Pi^+, f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{itz} dt$$

Preuve. (2) $\Rightarrow$ (1) : si une telle fonction F existe, alors f est holomorphe. En effet, pour tout $z \in \Pi+$, $t \mapsto F(t)e^{itz}$ est mesurable ; pour tout $t \in]0, +\infty[$, $z \mapsto F(t)e^{itz}$ est holomorphe ; et si $K \subset \Pi^+$ est compact, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $Im(z) \geq \delta$. On a alors

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall z \in K, |F(t)e^{itz}| \leq |F(t)| e^{-\delta t} \in L^1$$

avec $t \mapsto |F(t)|$ et $t \mapsto e^{-\delta t}$ dans L^2, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, f est donc holomorphe sur Π^+. Soit $y \in]0, +\infty$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+iy) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F(t) e^{itx} e^{-ty} dt$ et donc d'après le théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx &= \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 e^{-2ty} dy \\ &\leq \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{0<y<+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty$$

(1) $\Rightarrow$ (2) : si une telle fonction F existe, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x+iy)$ doit être la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto F(t)e^{-yt}$. D'après la formule d'inversion de Fourier, on aura alors, pour t dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy) e^{-itx} e^{ty} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(z) e^{-itz} dz \end{aligned}$$

où la dernière intégrale est prise sur une droite horizontale quelconque de Π^+. Montrons que la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix d'une telle droite. Soit $y \in]1, +\infty[$ (le cas

$y < 1$ se traitant de façon analogue). Posons $I = [1, y]$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$, on définit le chemin Γ_α comme le chemin rectangulaire dont les sommets sont $\pm\alpha + i$ et $\pm\alpha + iy$, parcouru dans le sens horaire.
D'après le théorème de Cauchy, on a alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-itz}dz \\
&= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x+iy)e^{-it(x+iy)}dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x+i)e^{-it(x+i)}dx \\
&- \int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du + \int_I f(-\alpha+iu)e^{-it(-\alpha+iu)}du
\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que les intégrales prises sur les segments verticaux tendent vers 0 quand $\alpha \to +\infty$, et que les intégrales sur les segments horizontaux sont convergentes quand $\alpha \to +\infty$. Pour cela, on pose

$$\Phi : \alpha \mapsto \int_{\alpha+i}^{\alpha+iy} f(z)e^{-itz}dz$$

qui correspond à l'intégrale sur le segment vertical. Alors

$$\begin{aligned}
|\Phi(\alpha)|^2 &= |\int_I f(\alpha+iu)e^{-it(\alpha+iu)}du|^2 \\
&\leq \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du \times \int_I e^{2tu}du \text{ (Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\Lambda : \alpha \mapsto \int_I |f(\alpha+iu)|^2 du$$

Λ est intégrable sur $\mathbb{R}$: en effet,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha)d\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_I |f(\alpha+iu)|^2 du \right) d\alpha \\
&= \int_I \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha+iu)|^2 d\alpha \right) du \text{ (Fubini-Tonelli (intégrandes positives))} \\
&\leq 2\pi C\lambda(I)
\end{aligned}$$

avec λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Comme Λ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe une suite (α_n) de réels positifs croissant vers l'infini telles que

$$\begin{cases} \Lambda(\alpha_n) \to 0 \\ \Lambda(-\alpha_n) \to 0 \end{cases}$$

Comme

$$|\Phi(\alpha)|^2 \leq \Lambda(\alpha) \times \int_I e^{2u}du$$

on en déduit par domination

$$\begin{cases} \Phi(\alpha_n) \to 0 \\ \Phi(-\alpha_n) \to 0 \end{cases}$$

et on remarque que ni la suite (α_n) ni ce résultat ne dépendent de t. On s'intéresse maintenant aux intégrales sur les segments horizontaux. Commençons par poser

$$g_n : (u,v) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} f(x+iu)e^{-ivx}dx$$

avec v dans $\mathbb{R}$ et u dans $]1,+\infty[$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\alpha_n}} f(z)e^{-itz}dz \\ &= e^{ty}g_n(y,t) - e^t g_n(1,t) + \frac{1}{2\pi}[\Phi(\alpha_n)+\Phi(-\alpha_n)] \end{aligned}$$

et $[\Phi(\alpha_n)+\Phi(-\alpha_n)] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ d'après ce qui précède. De là, on en déduit que

$$e^{ty}g_n(y,t) - e^t g_n(1,t) \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Posons $f_y : x \mapsto f(x+iy)$. Par hypothèse, $f_y \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème de Plancherel, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_y(t) - g_n(y,t)|^2 dt = 0$$

Il existe donc une sous-suite de $(g_n(y,t))$ qui converge vers $\hat{f}_y(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et on a alors que

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)e^{-itx}e^{ty}dx$$

ne dépend pas du choix de $y > 0$, et est définie pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. On applique une dernière fois le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_y(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx \\ &\leq C \end{aligned}$$

et ce pour pour tout $y \in]0,+\infty[$. En faisant tendre y vers $+\infty$, on a alors grâce au lemme de Fatou que $F(t) = 0$ pour presque tout $t \in]-\infty, 0[$. De plus, en faisant converger y vers 0, on obtient grâce au théorème de convergence monotone

$$\int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt \leq C$$

et donc $F \in L^2(\mathbb{R})$. Enfin, comme F et $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-ty}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $y \in]0,+\infty[$, on a

$$t \mapsto \hat{f}_y(t) = e^{-ty}F(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

Comme $f_y \in L^2(\mathbb{R})$, on peut alors appliquer le théorème d'inversion :

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_y(t)e^{itx}dt$$

ou encore

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{+\infty} F(t)e^{-yt}e^{itx}dt \\ &= \int_0^{+\infty} F(t)e^{itz}dt \end{aligned}$$