245: Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et Applications

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$

I) Généralités sur les fonctions holomorphes

1) Définitions et propriétés

[AM] p65

Def 1 : • f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z \in \Omega$ si $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$

• f est holomorphe sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Ex 2 : • $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée 1

• $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

[RU] p242

Prop 3 : $H(\Omega)$ est une algèbre et on a les formules de dérivation usuelles. Si $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega_1$ et $g \in H(\Omega_1)$, $g \circ f \in H(\Omega)$ et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$

Ex 4 : • Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

• Si $f(z) = \sum\limits_{n=0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$.

[AM] p66

Def 5 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de Ω.

Cor 6 : Toute fonction $\mathbb{C}$-analytique est holomorphe

2) Holomorphie et Différentiabilité

Prop 7 : $f \in \Omega \to \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :

(i) f $\mathbb{C}$-dérivable en $z \in \Omega$.

(ii) f différentiable en z et df_z = similitude directe

(iii) f différentiable en z et $df_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linéaire

Dans ce cas, df_z est la multiplication par $f'(z)$

Cor 8 : f holomorphe $\Rightarrow$ f différentiable. La réciproque est fausse.

Contre-Ex 9 : $z \mapsto \bar{z}$ est C^∞ mais $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Cor 10 : Conditions de Cauchy-Riemann

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe $\Leftrightarrow$ f différentiable sur Ω et $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$

Ex 11 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Application 12 : Ω connexe, $f \in H(\Omega)$. Equivalence (i) f constante sur Ω (ii) $\mathrm{Re} f$ constante sur Ω (iii) $\mathrm{Im} f$ constante sur Ω (iv) $|f|$ constante sur Ω (v) $\bar{f} \in H(\Omega)$.

3) Interprétation géométrique et physique

a) Interprétation géométrique

[OA] p58

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite conforme si elle préserve les angles.

Thm 13 : Les applications conformes en $z \in \Omega$ sont les fonctions holomorphes en z tq $f'(z) \neq 0$

Ex 14 : $\begin{array}{l} \mathbb{H} \to \mathbb{D} \\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{array}$ est une application conforme qui réalise une bijection de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

b) Interprétation physique :

à $f \in H(\Omega)$ on associe $V : (x,y) \mapsto (\mathrm{Re} f, -\mathrm{Im} f) = (V_1, V_2)$ un champ de vecteurs. Alors :

$\begin{cases} \mathrm{div}\, V = 0 : \text{champ incompressible} \\ \mathrm{rot}\, V = 0 : \text{champ irrotationnel} \end{cases}$

I) Fonctions holomorphes : Propriétés Générales

1) Théorie de Cauchy et conséquences

Def 15 : • Soient $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin et f continue sur Ω. Alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

• γ chemin fermé, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

[TAU] p71 Prop 16 : $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de Ω, nulle sur la composante non bornée de Ω.

[TAU] p76 Thm 17 : (Cauchy) Soit Ω un ouvert convexe, $z_0 \in \Omega$, f continue sur Ω, $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Alors f possède une primitive dans Ω et pour tout γ chemin fermé dans Ω, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Thm 18 : (Formule de Cauchy) Soit γ chemin fermé dans Ω convexe, $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}\gamma$, $f \in H(\Omega)$. Alors $f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}dz$

Cor 19. Soient $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$. Alors :

i) f est $\mathbb{C}$-analytique

ii) Ω convexe, γ fermé dans Ω, $z \notin \mathrm{Im}\gamma$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$

iii) f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

[TAU] p84 Thm 20 : (Inégalité de Cauchy) $f \in H(D(z_0,R))$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in]0,R[$, $\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{\sup\{|f(z)|, |z - z_0| = r\}}{r^n}$

Conséquences :

1) Thm de Liouville : Si $f \in H(\mathbb{C})$ est bornée alors f est constante

2) Thm d'holomorphie sous le signe intégrale : [AM] p94

$(X, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré, $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_X f(z,t)\,d\mu(t)$. On suppose que :

(i) $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable

(ii) $\forall t \in X$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω

(iii) $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $\exists g_K \in L^1(X)$ tq $|f(z,t)| \leq g_K(t)$ $\forall (z,t) \in K \times X$

Alors $F \in H(\Omega)$ et $\forall z \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $F^{(n)}(z) = \int \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\,d\mu(t)$

Application : $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ est holomorphe sur le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$

2) Prolongement analytique

Thm 21 : (Principe du prolongement analytique) [OA] p53

Soit Ω connexe. Si deux fcts analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset \Omega$ ayant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω

Thm 22 : (Zéros isolés) Si f analytique sur Ω connexe, $f \not\equiv 0$, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω.

Application : Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

3) Principe du maximum

Thm 23 : (local) Soit $f \in H(\Omega)$ telle que $|f|$ admet un max local en $z \in \Omega$. Alors f est constante dans un voisinage de z. [OA] p72

Thm 24 : (global) Ω connexe et borné, $f \in H(\Omega)$, continue sur $\overline{\Omega}$, $M = \max_{\partial\Omega} |f|$, alors :

(i) $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$

(ii) Si $\exists z \in \Omega$ tel que $|f(z)| = M$, alors f est constante sur Ω.

[TAU] p 87

<u>Conséquence</u>: Lemme de Schwarz. Soit $f \in H(\mathbb{D})$ tq $f(0)=0$ et $|f(z)|<1 \ \forall z \in \mathbb{D}$. On a :
(i) $|f(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$ (ii) $|f'(0)| \leq 1$
De plus, si $|f'(0)|=1$ ou si $\exists z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ tel que $|f(z)|=|z|$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, tq $f(z)=\lambda z \ \forall z \in \mathbb{D}$

<u>Application</u>: Le groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ se compose des transformations homographiques $z \mapsto \lambda \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$, $|\lambda|=1$, $|\alpha|<1$.

<u>Cor</u>: Les automorphismes de $\mathbb{H}$ sont les $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$.

[TAU] p 138

III - Fonctions méromorphes

1) Singularités

<u>Thm 25</u>: f holomorphe sur une couronne $K(z_0, \rho_1, \rho_2)$ avec $0 \leq \rho_1 < \rho_2 < +\infty$ est développable en série de Laurent dans cette couronne si $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tq $\forall z \in K(z_0,\rho_1,\rho_2)$, $f(z)=\sum_{n=-\infty} a_n (z-z_0)^n$. De plus la convergence est normale sur tout compact de K

[OA] p 66

<u>Def 26</u>: $f \in H(\Omega)$, $z_0 \notin \Omega$ est une singularité isolée de f si $\exists \rho>0$ tq $K(z_0, 0, \rho) \subset \Omega$.

<u>Def 27</u>: $z_0 \in \Omega$, $f \in H(\Omega\setminus\{z_0\})$, $\sum a_n (z-z_0)^n$ son développement en série de Laurent.
Trois cas sont possibles :
(i) z_0 est une singularité artificielle si $\forall n<0$, $a_n=0$
(ii) z_0 est un pôle d'ordre N si $\exists N>0$ tel que $\forall n<-N$, $a_n=0$ et $a_{-N} \neq 0$
(iii) z_0 est une singularité essentielle si il existe une infinité de $n<0$ tels que $a_n \neq 0$

<u>Ex 28</u>:
- $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$: sing. artificielle en 0
- $z \mapsto \frac{az+b}{cz+b}$: pôle simple en $z=-\frac{b}{c}$
- $z \mapsto \exp(1/z)$: sing. essentielle en 0.

<u>Def 29</u>: f est méromorphe sur Ω si $f \in H(\Omega\setminus S)$ où S est un fermé discret de Ω, tq les sing. de f aux pts de S sont toutes des pôles. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fcts méromorphes sur Ω. [AM] p 147

<u>Prop 30</u>: Ω connexe. $g, h \in H(\Omega)\setminus\{0\} \Rightarrow \frac{g}{h} \in \mathcal{M}(\Omega)$ [TAU] p 102

<u>Thm 31</u>: Soit $(f_n) \in \mathcal{M}(\Omega)$ tq $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $\exists N_K$ tq $\forall n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôle dans K et $\sum_{n \geq N_K} f_n$ CVU sur K. Alors la somme $\in \mathcal{M}(\Omega)$ et on peut dériver terme à terme.

<u>Application</u>: Prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$ (DVPT 1)

2) Théorème des résidus et applications

<u>Thm 32</u>: Soit $f \in H(\Omega\setminus\{z_1, \dots, z_n\})$, γ chemin fermé dans $\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$. Alors
$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k) \mathrm{Res}(f, z_k)$, avec $\mathrm{Res}(f,z_k)$ = coeff a_{-1} dans le dvpt en série de Laurent en z_k.

<u>Applications</u>:
1) Calcul d'intégrales : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, $\forall 0<\mathrm{Re}(z)<1$ (DVPT 2)
2) Dénombrement des zéros:

<u>Thm de Rouché</u>: Ω connexe, $f, g \in H(\Omega)$ non constantes, $K \subset \Omega$ compact à bords réguliers. Si $|f(z)-g(z)| < |f(z)|+|g(z)|$ sur ∂K alors f et g ont même nombre de zéros dans K. [AM] p 242

<u>Ex</u>: $z \mapsto z^8 - 5z^3 + z - 2$ a 3 zéros dans $\mathbb{D}$.

Références :

[AM]. Amar-Matheron - "Analyse complexe"
[OA]. Beck - Malick - Peyré - "Objectif Agrégation"
[RU]. Rudin - "Analyse réelle et complexe"
[TAU]. Tauvel - "Analyse complexe pour la Licence 3"
[ZQ]. Zuily-Queffélec - "Analyse pour l'agrégation"

Autres Développements possibles :

- Lemme de Schwarz
- Automorphismes de $\mathbb{D}$