Leçon 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Dans toute la leçon, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{C}$ et U désignera un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

I - Définitions et premières propriétés

A - Holomorphie

<u>Déf</u> : On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, on a

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ existe et on note $f'(z_0)$ cette limite.

On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

<u>Exemples</u> : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $(z \mapsto P(z)) \in H(\mathbb{C})$.

$\forall \Omega \subset \mathbb{C}$, $(z \mapsto |z|^2) \notin H(\Omega)$.

<u>Prop</u> : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe en z_0.

(ii) $df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

(iv) $\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial x}(z_0)$

<u>Prop</u> : Soient f et g dans $H(\Omega)$, on a alors

- $fg \in H(\Omega)$ et $(fg)' = f'g + fg'$.
- si $f(\Omega) \subset \Omega$ alors $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.

<u>Exemple</u> : Soit $f \in H(\Omega)$, f cte $\iff \mathrm{Re}(f)$ cte $\iff \mathrm{Im}(f)$ cte $\iff |f|$ cte

B - Théorie de Cauchy

<u>Déf</u> : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe C^1 et f une fonction continue sur $\gamma([0,1])$, l'intégrale de f sur γ est définie par

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

<u>Déf</u> : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet C^1, on définit l'indice de γ sur le complémentaire de $\gamma([0,1])$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1]),\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{u-z}\,du.$$

<u>Prop</u> : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

<u>Exemple</u> : Voir annexe : $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 2$, $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) = -1$, $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2) = 0$.

<u>Prop</u> : L'indice est constante sur toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.

<u>Théorème (Cauchy)</u> : Soient γ un lacet C^1 à valeurs dans U et $f \in H(U)$, on a alors :

$$\forall z \in U \setminus \mathrm{Im}\,\gamma,\ f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

<u>Théorème (Morera)</u> : Soit $f \in C^0(\Omega)$, alors pour tout triangle fermé Δ inclus dans Ω on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \iff f \in H(\Omega)$.

C - Analycité

<u>Déf</u> : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω.

<u>Déf</u> : f est entière si elle est analytique sur $\mathbb{C}$.

<u>Théorème</u> : f analytique sur $\Omega \iff f \in H(\Omega)$.

<u>Corollaire</u> : $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$ et si pour tout $z \in \Omega \cap D(a,r)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}$

II - Propriétés des fonctions holomorphes

A - Relations coefficients-intégrales

<u>Prop</u> : Soient $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, si $z \in D(a,R)$ alors $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$

avec $\gamma : [0,1] \to \partial D(a,R)$ tel que $\gamma(t) = a + Re^{2i\pi t}$.

Prop. : (Inégalités de Cauchy)
Soit $f \in H(D(a,R))$ **bornée**, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\|f\|_\infty}{R^n}.$$
Théorème (Liouville) : Toute fonction entière et bornée est constante.
Applications : D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- Le spectre d'un opérateur linéaire sur $\mathbb{C}$ est non vide.

B - Principe du maximum et lemme de Schwartz

Prop. : (Principe du maximum) : Soit $f \in H(U)$, $a \in U$, $r>0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$, on a alors pour tout $z \in D(a,r)$
$$|f(z)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a+re^{i\theta})|$$
On a le cas d'égalité si et seulement si f est constante sur $D(a,r)$.
Cor. : Si $f \in H(U)$, $a \in U$ et $r>0$ tels que $\overline{D(a,r)} \subset U$ alors si f ne s'annule pas sur $D(a,r)$, on a pour tout $z \in D(a,R)$
$$|f(z)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a+re^{i\theta})|.$$

Lemme de Schwarz : Soit $f \in H(D(0,1))$ telle que $\sup_{z \in D(0,1)} |f(z)| \leq 1$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k<m$, on a
- $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leq |z|^m$ et $|f^{(m)}(0)| \leq m!$.

Si on a égalité dans le premier cas pour un $z_0 \in D(0,1)\setminus\{0\}$ ou dans la deuxième inégalité alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall z \in D(0,1),\ f(z) = e^{i\theta} z^m.$$
Cor. : Inégalité de Borel-Carathéodory
Si f est une fonction entière vérifiant $f(0)=0$ alors, pour tout $R>0$, on a $\sup\{|f(z)|, |z|\leq R\} \leq 2 \sup\{\mathrm{Re}(f(z)), |z| \leq 2R\}$

C - Principe des zéros isolés

Principe des zéros isolés : Soit $f \in H(U)$ non nulle, $\{a \in U, f(a)=0\}$ est sans points d'accumulations dans U et si $f(a)=0$ alors il existe un voisinage V_a de a, $m \in \mathbb{N}$ et $g \in H(U)$ tel que pour tout z dans V_a, on ait $f(z) = (z-a)^m g(z)$ et $g(a) \neq 0$.
Rmq : Faux si U n'est pas connexe, $U = U_1 \cup U_2$ avec U_1, U_2 ouverts et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $f(U_1) = \{0\}$ et $f(U_2) = \{1\}$.
Cor. : Si f est holomorphe sur U alors $\{z \in U, f(z)=0\}$ est au plus dénombrable.
Principe du prolongement analytique :
Soient f et g dans $H(U)$ et A un **sous-ensemble** de U ayant un point d'accumulation dans U.
$$f_{|A} = g_{|A} \iff f = g.$$
Cor. : Si $f \in H(U)$ admet un maximum local alors f est constante.
Exemples : - Si $f \in H(D(0,1))$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n+2}$ alors f est nulle.
$f : z \longmapsto \sin(\frac{2\pi}{z})$ vérifie $f \in H(\mathbb{C}^*)$ et $f(\frac{1}{n+1}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mais $f(4) = 1 \neq 0$.

D - Suites et intégrales de fonctions holomorphes

Théorème (Weierstrass) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (H(\Omega))^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur tout compact de Ω. On a alors $f \in H(\Omega)$ et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur tout compact de Ω.
Exemple : $\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur D_ζ.
$$z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$
Théorème (Montel) : Soit $(f_n) \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ uniformément bornée sur les compacts de Ω. (f_n) admet une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers $f \in H(\Omega)$. [OVPT]

Théorème : Soit $F : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant
(i) $\forall z \in \Omega$, $(x \mapsto F(x,z))$ mesurable
(ii) $\forall x \in X$, $(z \mapsto F(x,z)) \in H(\Omega)$
(iii) $\forall K$ compact de Ω, $\exists g_K \in L^1(X)$, $\forall x \in X, \forall z \in K, |F(x,z)| \leq g_K(x)$.
On a alors $(z \mapsto \int_X F(x,z)\,dx) \in H(\Omega)$.

Application : $\Gamma : \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur D_Γ.
$$z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

III - Fonctions méromorphes et application du théorème d'inversion globale

A - Méromorphie et théorème des résidus

Déf : Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, a est un pôle d'ordre m de f si $m > 0$ et $g : z \mapsto (z-a)^m f(z) \in H(\Omega)$ et $g(a) \neq 0$.

Déf : On dit que f est méromorphe sur Ω si il existe $A \subset \Omega$ tel que $f \in H(\Omega \setminus A)$ et tel que tous les points de A soient des pôles isolés de f. Cet ensemble est unique et on le note A_f.
On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Exemples : - Si $(f,g) \in H(\Omega) \times (H(\Omega) \setminus \{0\})$ alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\Omega)$.
[VPT] - Prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$.

Prop : Si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ et a est un pôle d'ordre m de f alors il existe un unique $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $c_m \neq 0$ et $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω. On appelle alors résidu de f en a le coefficient c_1 noté $\mathrm{Res}(f;a)$.

Théorème des résidus : Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et γ un lacet C^1 par morceaux de $\Omega \setminus A_f$ tel que $\forall z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$, on a alors
$$\int_\gamma f(u)\,du = 2i\pi \sum_{a \in A_f} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f;a).$$

Prop : Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\exists (g,h) \in H(\Omega)^2$, $f = \frac{g}{h}$ et a est un pôle d'ordre m de f dans Ω alors $\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial}{\partial z^{m-1}} \left[\frac{(z-a)^m g(z)}{h(z)}\right]_{z=a}$

Applications : 1 - Calcul d'intégrales
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n})}$
- Si $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$

2 - Transformée de Fourier
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ prolongeable en une fonction méromorphe au voisinage de $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$ et telle que $f(z) \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0$, on a $(|A_f| < +\infty)$
$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = 2i\pi \sum_{a \in A_f} \mathrm{Res}(f(\cdot)e^{i\alpha \cdot}; a).$$

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

B - Inverse de fonctions holomorphes et représentations conforme

Théorème (Inversion locale) : Soit $f \in H(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$ alors $\exists V$ voisinage de z_0 tel que $f(V)$ soit ouvert et $f_{|V}$ soit bijective d'inverse holomorphe.

Lemme : Si f est holomorphe injective alors f' ne s'annule pas.

Théorème (Inversion globale) : Soit $f \in H(\Omega)$, injective sur Ω. On a alors f bijective et f^{-1} holomorphe sur $f(\Omega)$.

Théorème (Application ouverte) : Si $f \in H(\Omega)$ alors f est ouverte.

Théorème (Représentation conforme de Riemann)
Soient U_1 et U_2 deux ouverts stricts simplement connexes, $\exists f : U_1 \to U_2$ telle que $f \in H(U_1)$, f bijective et $f^{-1} \in H(U_2)$.

Déf : On appelle automorphisme de Ω toute bijection holomorphe de Ω dans Ω telle que l'inverse soit holomorphe.
On note $\mathrm{Aut}(\Omega)$ l'ensemble des automorphismes de Ω.

Prop : $\mathrm{Aut}(D(0,1)) = \{\Phi_{\lambda,a},\ \lambda \in \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\},\ a \in D(0,1)\}$ avec [OVIT]
$$\Phi_{\lambda,a} : \begin{array}{l} D(0,1) \to D(0,1) \\ z \longmapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{array}.$$

Réf : Rudin, Analyse réelle et complexe
Amar-Matheron, Analyse complexe
Beck-Malick-Peyré, Objectif agrégation
Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques
Yger, Analyse complexe et distributions

autres idées : fonctions harmoniques

Annexe :