245 — FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{C}$. EXEMPLES ET APPLICATIONS

Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{C}$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $\mathrm{Re} f = P$. $\mathrm{Im} f = Q$
On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ pour les notions de différentiabilité.

I. INTRODUCTION AUX FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Définitions, propriétés élémentaires, exemples

[AM] p65 **Def 1** f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ si la limite $f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$.

[AM] p68 **Def 2**. f est dite holomorphe dans Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et si f est de classe C^1.
On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Ex 3 $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée 1 donc holomorphe.

[AM] p65-66 **Prop 4** : La somme, le produit, la composée de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable. De même pour l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable.

Ex 5 Une fonction polynomiale est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$. Une fonction rationnelle sans pôles dans Ω est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

[TAU] p50 **Def 6** f est analytique dans Ω si elle est développable en série entière (DSE) en tout point de Ω.

Ex 7 $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Prop 8 Une fonction analytique sur Ω est infiniment dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques.

Coro 9 Une fonction analytique sur Ω est holo sur Ω.

Ex 10 exp : $z \mapsto \sum z^n/n! \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. Holomorphie et différentiabilité

[AM] p66 **Prop 11** f est $\mathbb{C}$ dérivable en un point $a \in \Omega$ ssi f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe.
Si l'une de ces propriétés est vérifiée, alors $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

[AM] p65 [AM] p67 **Coro 12** Toute fonction holomorphe est différentiable sur $\mathbb{C}$.

C-ex 13 La réciproque est fausse $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable (même C^∞) mais non holomorphe.

[OA] p57 **Thm 14** Conditions de Cauchy-Riemann
Si f est différentiable sur Ω, sont équivalentes :
1) f holomorphe sur Ω 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$
3) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Coro 15 Si on définit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ alors
f holomorphe sur $\Omega \Leftrightarrow \partial f/\partial \bar{z} = 0$ [AM] p68

Prop 16 Si Ω est convexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Alors $f' = 0$ sur $\Omega \Rightarrow f$ constante

Prop 17 Sous les conditions de la prop 16, on a équivalence :
- f constante sur Ω
- $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$
- $\mathrm{Re}(f)$ constante sur Ω
- $\mathrm{Im}(f)$ constante sur Ω
- $|f|$ constante sur Ω.

[TAU] p61

App Ω convexe, les applications $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{Im} f = (\mathrm{Re} f)^2$ sont exactement les $z \mapsto \lambda^2 + i\lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. [TAU] p65

II. FONCTIONS HOLO : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1. Formules de Cauchy

Def 18 On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b)$ [AM] p13
On dit que γ est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$. [AM] p14

Def 19 Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\mathrm{Im}\,\gamma$. Alors $\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. [AM] p18

Ex 20 Si $R > 0$, $\theta_0 \leq \theta$, et $\gamma : [\theta_0, \theta] \to \mathbb{C}^*$, $\theta \to Re^{i\theta}$ [AM] p19
Alors $\int_\gamma \frac{dz}{z} = i(\theta - \theta_0)$

Def 21 Si $p \in \mathbb{C}$, γ un lacet dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, l'indice de γ par rapport au point p est le nombre $I(\gamma, p)$ défini par [AM] p193-194
$I(\gamma, p) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-p} \in \mathbb{Z}$ ("nombre de tours")

Thm 22 Théorème de Cauchy. Ω convexe. [TAU] p76
Si $p \in \Omega$, f continue sur Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pour tout lacet γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Thm 23 Formule de Cauchy. Ω convexe [TAU] p77

Si $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$ et γ un lacet à valeurs dans $\Omega \setminus \{a\}$
$$f(a)\, I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

[AT] p84 **Coro 24** Toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. En particulier, la dérivée d'une fonction holo est holo.

[TAU] p77 **Coro 25** Sous les mêmes conditions que le thm 23.
$$f^{(n)}(a)\, I(\gamma, a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

Coro 26 Formule de la moyenne [AT] p84
Si f est holo au voisinage d'un disque $\overline{D}(z_0, r)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

En particulier, $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur le cercle ∂D.

2. Analyticité et inégalités de Cauchy

Thm 27 Si $f \in H(D(z_0, r))$ alors [AT] p86
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$
et la série converge normalement sur les compacts de D.

[AT] p87 **Coro 28** En particulier, si $f \in H(\Omega)$, f est analytique sur Ω.
Rq avec le Coro 9, on a analytique $\Leftrightarrow$ holomorphe.
Rq le rayon de convergence de la série est au moins égal à $d(z, \Omega \setminus \mathbb{C})$. (cf Annexe) [TAU] p77

Prop 29 Si $f \in H(D(z_0, R))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in]0, R[$
[AT] p89
$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{où } M(r) = \sup_{z \in S(z_0, r)} |f(z)|$$

De plus, si l'égalité a lieu pour un certain n_0 et un certain r, alors $f(z) = \lambda (z-z_0)^{n_0}$ où λ constante.

App 30 Thm de convergence de Weierstrass [AT] p91
Si $(f_n) \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f.
Alors $f \in H(\Omega)$ et $f_n' \xrightarrow{CU} f'$ sur les compacts.

Ex 31 La fonction $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.
[AT] p91

3. Conséquences de la représentation en série entière [TAU]

Thm 32 Principe de prolongement analytique p52
Si Ω connexe, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$. Sont équivalents
i) $f \equiv 0$ sur Ω ii) $f \equiv 0$ sur un voisinage de a
iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(a) = 0$.

Coro 33 Si Ω connexe, $f, g \in H(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω, on a $f = g$. p52.

Coro 34 Principe des zéros isolés p53
Si Ω connexe, $f \in H(\Omega)$ non nulle, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Ex 35 Si $0 \in \Omega$, il n'existe pas de fonctions $f \in H(\Omega)$ tq $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour n assez grand. p54.

Thm 36 Thm de Liouville p85.
Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier et bornée est constante.

App 37 Thm de D'Alembert-Gauss p85
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

App 38 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a au moins une valeur propre. ([AT] p150)

Def 39 Si f continue sur Ω, on dit que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω si pour tout disque fermé $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$
$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta \qquad \text{p85}$$

Rq une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne p85

Thm 40 Principe du maximum local p86
Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω, et si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \Omega$, alors f est constante au voisinage de a.

Thm 41 Principe du maximum global p86
Si Ω connexe et borné, f continue sur $\overline{\Omega}$ et constante au voisinage de chaque point pour lequel elle admet un maximum local. On note M le maximum de $|f|$ sur la frontière de Ω.
- $\forall z \in \Omega$ $|f(z)| \leq M$.
- S'il existe $a \in \Omega$ tq $|f(a)| = M$ alors f est constante sur Ω.

C-ex 42 La propriété de la moyenne n'empêche pas l'existence de minima locaux. $z \mapsto z$ sur $D(0,1)$. $|f|$ atteint son minimum en $z=0$. ([OA] p73)

Ex 43 Si Ω connexe, D disque ouvert tq $\bar{D} \subset U$ et $f \in H(\Omega)$ non constante. Si $|f|$ constante sur la frontière de D, alors f a au moins un zéro dans D : p94

App 44 Lemme de Schwarz. p87

Si $f \in H(D(0,1))$ tq $f(0)=0$ et $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z)|<1$. Alors $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

De plus, si $|f'(0)|=1$ ou si $\exists z_0 \in D(0,1)\setminus\{0\}$ tq $|f(z_0)|=|z_0|$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda|=1$ et $\forall z \in D(0,1)$ $f(z)=\lambda z$.

4. Intégrales de fonctions holomorphes

[AN] p94 ou [OA] p67

Thm 45 Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$

Si
- $\forall z \in \Omega$ $F(z,\cdot)$ est mesurable.
- $\forall t \in T$ $F(\cdot,t) \in H(\Omega)$
- $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists u_K \in L^1(T,\mu)$ $|F(z,t)| \leq u_K(t)$ pour tout $(z,t) \in K \times T$.

Alors $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\, d\mu(t) \in H(\Omega)$. Toutes les dérivées de f s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

App 46 Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors la fonction caractéristique de X est $t \mapsto e^{-t^2/2}$. [NOUR] p82.

[OA] p110 140

App 47 Densité des polynômes orthogonaux

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$
et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)dx < +\infty$.

[DVP] On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour $\langle f,g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$. C'est un Hilbert.

On peut construire une famille de polynômes (P_n) unitaires orthogonaux 2 à 2 tq $\deg P_n = n$. En normalisant ces polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

III. FONCTIONS MÉROMORPHES

1. Singularités et méromorphie

Thm 48 Soient $a \in \mathbb{C}$, $r, R \in [0,+\infty]$ et f holo dans la couronne $C(a,r,R)$. Il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-a)^n$. C'est le développement en série de Laurent de f sur $C(a,r,R)$. [TAU] p138

Rq si $\rho \in]r,R[$ $\alpha_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it}) e^{-int} dt$.

Def α_{-1} est le résidu de f en a : $\alpha_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$. [TAU] p140

Def 49
- si $a \in \mathbb{C}$, f a une singularité isolée en a si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ [TAU] p99
- Si a est une singularité isolée, en reprenant les notations du thm 48 a est un pôle $\Leftrightarrow$ $\exists m \geq 1$ $\alpha_{-m} \neq 0$ et $\alpha_n = 0$ pour $n < -m$ [AN] p46

Ex 50 Si $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$. 2 est un pôle de f. [TAU] p143

Alors le DSL de f sur $D(0,1)$ est $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right) z^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} z^{2k+1}$

Def 51 f est méromorphe sur Ω s'il $\exists$ une partie localement finie $A \subset \Omega$ tq $f \in H(\Omega \setminus A)$ et tq tout point de A soit un pôle de f. On note $\mathfrak{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes. [TAU] p101

Ex 52 f de l'ex 50 est méromorphe

Prop 53 Si Ω connexe, $g, h \in H(\Omega) \setminus \{0\}$ alors $\frac{g}{h} \in \mathfrak{M}(\Omega)$. [TAU] p101

Rq on a aussi que si $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$, $f = \frac{g}{h}$ avec $g, h \in H(\Omega) \setminus \{0\}$

Thm 54 Soit $(f_n) \in \mathfrak{M}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ telle que sur tout compact K de Ω $\exists N_K \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_K$, f_n n'a pas de pôles dans K et $\sum_{n \geq N_K} f_n$ CVU sur K. Alors $\sum f_n \in \mathfrak{M}(\Omega)$ et $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$. [TAU] p109-110 ou [OA] p71

App 55 Pour z tq $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Elle est holomorphe et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. [DVP1]

2. Théorème des résidus et applications

Thm 56 Théorème des résidus [TAU] p103

Si Ω convexe, $a_1, \dots, a_n \in \Omega$ deux à deux distincts, les a_k sont des pôles de $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. γ lacet de Ω tel que $\forall k$ $a_k \notin \mathrm{Im}\,\gamma$. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\, I(\gamma, a_k)\, \mathrm{Res}(f, a_k)$

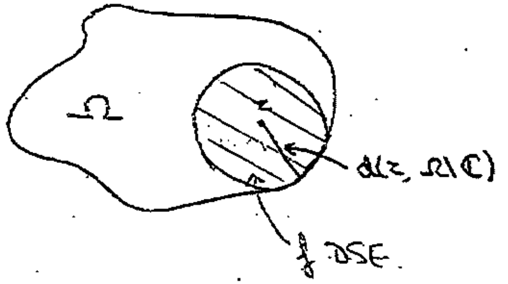
Ex 57 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$ [AN] p246-247

Ex 58 $\forall \alpha \in]0,1[$ $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \pi / \sin(\pi\alpha)$ [AN] p249

App 59 Formule des compléments
$\forall z \in \mathbb{C}$ tq $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z)$

ANNEXE

[OA] p64



On peut rajouter :

→ transformations conformes
→ fonctions harmoniques
→ déf singularité artificielle, essentielle et thm de Casorati-Weierstrass.
→ théorème de Rouché
→ anneau des fonctions holomorphes

Références

[AM] Amar-Matheron, Analyse complexe.
[TAU] Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3.
[OA] Objectif Agrégation
[NOUR] Nourdin, Agrégation de Mathématiques Epreuve Orale

Densité des polynômes orthogonaux

Laura GAY ◇ Camille FRANCINI

Référence : BECK, MALICK, PEYRÉ : Objectif agrégation, 2ème édition p.110 et p.140
Leçons : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 240, 245.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathrm{I}} |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

Définition 2

On note l'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition

L'espace $L^2(\mathrm{I}, \rho)$ est un espace de Hilbert. Les polynômes appartiennent à $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.
En particulier, il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$) deux à deux et tels que $\deg P_n = n$ (orthogonalisation de Gram-Schmidt). Cette famille s'appelle la *famille des polynômes orthogonaux* associés à la fonction poids ρ.

Théorème (*Densité des polynômes orthogonaux*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$.

Preuve :

But : Les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée. Il reste donc à montrer qu'elle est totale, donc que $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est dense dans $L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Or $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathrm{I}, \rho)$, il faut donc montrer que

$$\mathrm{Vect}((P_n)_n)^\perp = 0$$

Mais, par construction de $(P_n)_n$, on a $\mathrm{Vect}((P_n)_n) = \mathrm{Vect}((X^n)_n)$. On veut donc montrer que $\mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = 0$.
En posant $g_n : x \to x^n$, cela revient à montrer :

Si $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors $f = 0$.

Dans la suite, $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$ et vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etape 1 :

Soit $f \in L^2(\mathrm{I}, \rho)$. Soit φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que φ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad |f(x)|\,\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I (par définition pour ρ et $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$ pour ρf^2), on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 :

On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x)\rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < a/2\}$.

Posons, pour $z \in B_a$ et $x \in \mathrm{I}$, $g(z,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}f(x)\rho(x)$.
On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_a, \qquad F(z) = \int_{\mathrm{I}} g(z,x)\,\mathrm{d}x$$

Vérifions que cette fonction est bien définie :
En effet, on a $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}\right| = \mathrm{e}^{\mathcal{I}m(z)x} \leqslant \mathrm{e}^{|\mathcal{I}m(z)||x|} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}$
Donc, pour $z \in B_a$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que F vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
H1) Pour tout $z \in B_a$, l'application $x \to g(z,x)$ est intégrable (déjà vu)
H2) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $z \to g(z,x)$ est holomorphe (exponentielle)
H3) Pour tout $z \in B_a$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)}_{\text{indpt de } z \text{ et intg sur I}}$$

Donc F est bien holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$.

Etape 3 :

On calcule $F^{(n)}(0)$ pour montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ alors $f = 0$.

Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_a, \qquad F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en ayant posé $g_n : x \to x^n$, on obtient :

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0.
Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On déduit que $\widehat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} = 0$.
Comme φ est intégrable (vu à l'étape 1), l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$.
Or, ρ est strictement positive donc $f = 0$ sur presque tout I.

■

Bonus

Pourquoi imposer une telle condition (d'écrasement) sur la fonction poids ?

Contre-exemple

On considère, sur $I =]0, +\infty[$, la fonction poids $\omega(x) = x^{-\ln(x)}$.
Montrons que les polynômes orthogonaux pour le poids ω ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I}, \omega)$.
Considérons la fonction $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$.
Montrons que la fonction f est orthogonale à g_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pourtant $f \neq 0$).
En effet,

$$
\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle_\omega &= \int_0^{+\infty} x^{n-\ln(x)} \sin(2\pi \ln(x))\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+u(n+1)} \sin(2\pi u)\, \mathrm{d}u \qquad \boxed{u \leftrightarrow \ln(x)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi u)\, \mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t + (n+1)\pi)\, \mathrm{d}t \qquad \boxed{t \leftrightarrow u - (n+1)/2} \\
&= (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t)\, \mathrm{d}t \\
&= 0 \qquad \text{car l'intégrande est impaire}
\end{aligned}
$$

Ainsi, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale donc la famille des polynômes orthogonaux associés à ω non plus. Ce n'est pas une base hilbertienne.

Exemples de polynômes orthogonaux

- Polynômes de Hermite
  On prend I$= \mathbb{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
  $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}, \ldots, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$
- Polynômes de Legendre
  On prend I$= [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.
  $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}, \ldots, P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$

Notes :

✓ Attention, dans le livre α et a sont les mêmes.
✓ N'a d'intérêt que si I non borné car sinon on a Weierstrass.
✓ Sert à diagonaliser des opérateurs autoadjoints compacts, résoudre des équations.

Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Laura GAY ◇ Camille FRANCINI

Référence : ZUILY-QUEFFÉLEC p.313 pour le Lemme et Objectif Agrégation, exercice 2.10 p. 82 pour la suite

Définition

La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Lemme

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}$.

Preuve :

Pour l'holomorphie, il suffit d'appliquer le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** à la fonction

$$(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$$

H1) $\forall z \in \mathscr{P}$, $t \mapsto e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
H2) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathscr{P}$
H3) Si K est un compact de $\mathscr{P}$, $\Re(z) \in [\varepsilon, M]$, où $\varepsilon > 0$ et[1]

$$\left|e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\right| \begin{array}{lll} \leqslant & e^{(\varepsilon-1)\ln t} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \overset{(*)}{\leqslant} & t^{M-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array} \quad \text{et ces deux fonctions sont intégrables.}$$

D'où l'holomorphie de Γ. ■

But : montrer qu'il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathscr{P}$. Ce prolongement sera encore noté Γ.

Théorème

Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Etape 1 : montrons que pour tout $z \in \mathscr{P}$, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

On cherche donc à écrire maintenant la première intégrale sous forme d'une série. On développe l'exponentielle :

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Il faut maintenant vérifier que l'on peut bien permuter somme et intégrale avec le théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage).

1. $|e^z| = e^{\Re(z)}$

Remarquons que pour $t > 0$, $|t^z| = |e^{z\ln t}| = e^{\Re(z)\ln t} = t^{\Re(z)}$.

On obtient alors, pour $t \in]0,1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| |t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1}e^t$.

Comme $\Re(z) > 0$, $\Re(z) - 1 > -1$ et la fonction $t \to t^{\Re(z)-1}e^t$ est intégrable[2] sur $]0,1]$.

Ainsi $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}\right| dt < +\infty$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et inverser somme et intégrale.

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}.$$

On obtient bien, pour tout $z \in \mathscr{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Etape 2 : Montrons que $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

On utilise le ***Théorème sur les séries de fonctions méromorphes***

H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.

H2) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N_K)}$. Pour $n > N_K$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.

De plus, pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K$.

Par conséquent, pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!(n-N_K)}$ et donc $\sum_{n>N_K} f_n$ CVN sur K.

Donc, par théorème, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

Etape 3 : On applique le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** pour conclure.

H1) et H2) sont évidentes pour $f(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$.

H3) On utilise la majoration $(\star)$ faite dans la démonstration du **Lemme**. Et $t \mapsto t^{M-1}e^{-t} \in L^1([1,+\infty[)$.

Donc $z \mapsto \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$. Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$.

∎

Notes :

♣ Leonhard EULER (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

2. Il s'agit d'une comparaison avec les intégrales de Riemann. On peut dire que c'est $\leqslant et^{\Re(z)-1}$ qui est intégrable par Riemann.