Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

245

Cadre : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

I- Généralités sur les fonctions holomorphes

1) Définitions et propriétés

[AM] p:65 Déf 1: Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$, si la limite $f'(a) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$.

[AM] p:68 Déf 2: On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable en tout point. On notera $\mathcal{H}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω

[AM] p:65 Ex 3: * $z \longmapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est la fonction constante 1 donc holomorphe

[AM] p:65 Contre-Ex 4: * La fonction $z \longmapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

[AM] p:65-66 Prop 5: La somme, le produit et la composée de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable. Et l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable qui ne s'annule pas est $\mathbb{C}$-dérivable.

[AM] p:65 Ex 6: Toute fonction polynomiale $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$.

[TAU] p:50 Déf 7: On dit qu'une fonction définit sur Ω est analytique dans Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

[TAU] p:50 Ex 8: La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$

[TAU] p:50 Prop 9: Une fonction analytique sur Ω est indéfiniment dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques. En particulier, toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω.

2) Holomorphie et Différentiabilité

[AM] p.66 Prop 10: $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$

ii) f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe

iii) f est différentiable en a et $df(a) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire

Si ces propriétés sont vérifiées, alors $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$

Cor 11: Toute fonction holomorphe est différentiable. La réciproque est fausse. [AM] p:67

Contre-Ex 12: $z \longmapsto \bar{z}$ est différentiable mais non holomorphe. [AM] p:65

Thm 13: Condition de Cauchy-Riemann [AM] p:67-68

Soit $f = P + iQ$ (où $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$) une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ qui est différentiable sur Ω. Alors les propositions sont équivalentes : i) f est holomorphe sur Ω

ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$

iii) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Ex 14: La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $(e^z)' = e^z$. [AM] p:73

Prop 15: Soient Ω connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f' est identiquement nulle sur Ω, alors f est constante [TAU] p:61

Prop 16: Ω connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes: i) f est constante sur Ω [TAU] p:61

ii) $Re(f)$ est constante sur Ω

iii) $Im(f)$ est constante sur Ω

iv) $|f|$ est constante sur Ω

v) $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Ex 17: Soit Ω connexe de $\mathbb{C}$, les applications $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $Im(f(z)) = Re\, f(z)^2$ pour tout $z \in \Omega$ sont celles de la forme $z \mapsto \lambda^2 + i\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. [TAU] p:65

II- Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

1) Formule de Cauchy

Déf 18: On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq b$ [AM] p:13

Déf 19: Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que γ est un lacet [AM] p:14

Déf 20: Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $Im\, \gamma$. Alors : $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ [TAU] p:69

[TAU] p: 71 **Déf 21**: Soit γ un lacet dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} \gamma$. Pour $z \in \Omega$, on pose
$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \in \mathbb{Z}$$
On dit que $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ

[TAU] p: 76 **Thm 22**: (Théorème de Cauchy pour un convexe)
Soient Ω convexe, $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ continue sur Ω. Alors f possède une primitive dans Ω et, pour tout lacet γ dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

[TAU] p: 77 **Thm 23**: (Formule de Cauchy pour un convexe)
Soit γ un lacet dans Ω convexe de $\mathbb{C}$, $z \in \Omega \setminus \operatorname{Im}\gamma$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors : $f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$.

[AM] p: 84 **Cor 24**: Toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. En particulier, la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe.

[TAU] p: 77 **Cor 25**: Sous les mêmes conditions que le thm 23,
$$f^{(n)}(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$$

[AM] p: 84 **Cor 26**: (Formule de la moyenne)
Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(z_0, r)$, alors, pour tout entier $n \geq 0$, on a :
$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = r^{-n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$
En particulier, $f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ ce qui signifie que $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur le cercle ∂D.

[AM] p: 89 **Thm 27**: (Inégalités de Cauchy)
Si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, alors, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $r \in]0, R[$ on a : $\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{\sup\{|f(z)| ;\ |z - z_0| = r\}}{r^n}$

Conséquences des inégalités de Cauchy.

Thm 28: (Théorème de Liouville) [TAU] p: 85
Toute fonction entière et bornée est constante

App 29: (Thm de D'Alembert) [TAU] p: 85
Tout polynôme d'une variable à coeff complexes et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

2) Analycité des fonctions holomorphes

Thm 30: si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, alors on peut écrire : [AM] p: 86
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$
où la série cv normalement sur les compacts de $D = D(z_0, R)$

Cor 31: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est développable en série entière dans tout disque contenu dans Ω. En particulier, f est développable en SE au voisinage de chaque point de Ω. [AM] p: 87

Rq 32: D'après la prop 9 et le cor 30, on a analytique $\Leftrightarrow$ holomorphe

Thm 33: (Théorème de Morera) [TAU] p: 7
Soit f une fonction continue sur Ω. Les conditions sont équivalentes :
i) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ii) f possède localement une primitive dans Ω
iii) Pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

Thm 34: (Théorème des zéros isolés) [OA] p: 53
Si f est une fonction analytique dans Ω connexe et si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω.

Ex 35: Soit Ω de $\mathbb{C}$ contenant 0. Il n'existe pas de fonctions $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand. [TAU] p: 54

Thm 36: Soit Ω connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \Omega$ ayant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω. [OA] p: 54

3) Principe du maximum

Déf 37: f continue sur Ω. On dit que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω si pour tout disque fermé $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$, [TAU] p: 85 [OA] p: 72
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$$

:72 [OA] **Rq 38:** Une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne.

:72 [OA] **Thm 39:** (Principe du max local)
Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω, et si $|f|$ admet un max local en $a \in \Omega$, alors f est constante dans un voisinage de a.

:72 [OA] **Thm 40:** (Principe du max global)
Soit Ω connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$ vérifiant la propriété de la moyenne sur Ω. Notons M le max de $|f|$ sur la frontière (compacte) de Ω. On a alors :
* pour tout $z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$
* s'il existe $z_0 \in \Omega$ tq $|f(z_0)| = M$, alors f est constante sur Ω.

94 [TAU] **Ex 41** Soient Ω connexe, D un disque ouvert tq $\overline{D} \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, non constante. Si $|f|$ est constante sur la frontière de D, alors f a au moins un zéro dans D.

87 [TAU] **App 42:** (Lemme de Schwarz)
Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. On a : i) $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D(0,1)$ ii) $|f'(0)| \leq 1$
De plus, si $|f'(0)| = 1$, ou s'il existe $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tq $|f(z)| = |z|$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifiant $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0,1)$

3) Intégrales de fonctions holomorphes.

:94 [AM] **Thm 43:** Soit (T, t, μ) un espace mesuré, et soit $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$. Si F vérifie les propriétés suivantes : i) $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable
ii) $\forall t \in T$, $z \mapsto F(z,t)$ est holomorphe dans Ω.
iii) $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists u_K \in L^1(T,\mu)$ tq $|F(z,t)| \leq u_K(t)$, $\forall (z,t)$
Alors $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\, d\mu(t) \in \mathcal{H}(\Omega)$. De plus toutes les dérivées de f s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

DEV 1
[OA] p: 110 et p: 140
App 44. (Densité des polynômes orthogonaux)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$.
Alors les polynomes orthogonaux associés à ρ forment une base Hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

III - Fonction méromorphe

1) Singularité

Déf 45: Soit $a \in \mathbb{C}$, $r, R \in [0, +\infty]$, et f une fonction holomorphe dans la couronne $C = C(a, r, R)$. Il existe une et une seule suite de nb complexes $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tq la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n z^n$ cv dans $C(0, r, R)$ et vérifiant pour tout $z \in C$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n$ (c'est le développement en série de Laurent) [TAU] p: 138

Déf 46: d_{-1} est le résidu de f en a, $d_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$ [TAU] p: 140

Def 47 Si $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que f a une singularité isolée en a [TAU] p: 99

Def 48: * a est un pôle ssi $\exists m \geq 1$ tq $d_{-m} \neq 0$ et $d_n = 0$ pour $n < -m$ [OA] p: 66
* a est une singularité artificielle si $\forall n < 0$, $d_n = 0$
* a est une singularité essentielle si il existe une infinité de $n < 0$ tq $d_n \neq 0$

Ex 49: $f_1 : z \mapsto \frac{\sin z}{z}$: 0 est une singularité artificielle de f_1
$f_2 : z \mapsto \frac{1}{z-1}$: 1 est un pôle de f_2
$f_3 : z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$: 0 est une singularité essentielle de f_3.

Def 50: Une fonction f sur Ω est dite méromorphe dans Ω s'il existe une partie localement fini A de Ω tq $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et tq tout point de A soit un pôle de f. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonction méromorphes dans Ω. [TAU] p: 101

2) Théorème de Résidus.

Thm 53: Soit Ω connexe, $a_1, \dots, a_n$ les points 2 à 2 distincts de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un lacet dans Ω tq $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k \notin \mathrm{Im}\, \gamma$. Alors $\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(a_k) \mathrm{Res}(f, a_k)$ [TAU] p: 103

Ex 54: * $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{2p}+1}\, dt = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)}$ [AM] p: 247
* $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$, $a > 1$

App 54: Formule des compléments (admis). $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors [AM] p: 163
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

3) Série de fonctions méromorphes

Thm 54: $\sum f_n$ une série méromorphe sur Ω, cv uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Alors la série $\sum f_n'$ de fonction méromorphes sur Ω cv uniformément (resp. normalement) sur Ω et : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ [TAU] p: 109-110

App 55: Pour z tq $\mathrm{Re}(z) > 0$, on def $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$. Elle est holomorphe et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ [20] p: 313 DEV 2

Ex 56: Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ [TAU] p: 111

Références :

- [AM] : Amar - Matheron - "Analyse complexe"
- [TAU] : Tauvel - "Analyse complexe pour la licence 3"
- [OA] : Beck - Malick - Peyré - "Objectif agrégation"
- [ZQ] : Zuily - Queffélec - "Analyse pour l'agrégation"

Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Laura GAY ⋄ Camille FRANCINI

Référence : ZUILY-QUEFFÉLEC p.313 pour le Lemme et Objectif Agrégation, exercice 2.10 p. 82 pour la suite

Définition

La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Lemme

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}$.

Preuve :

Pour l'holomorphie, il suffit d'appliquer le *Théorème d'holomorphie sous le signe intégral* à la fonction

$$(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$$

H1) $\forall z \in \mathscr{P}$, $t \mapsto e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

H2) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathscr{P}$

H3) Si K est un compact de $\mathscr{P}$, $\Re(z) \in [\varepsilon, M]$, où $\varepsilon > 0$ et [1]

$$\left|e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\right| \begin{array}{lll} \leqslant & e^{(\varepsilon-1)\ln t} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \overset{(\star)}{\leqslant} & t^{M-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array} \quad \text{et ces deux fonctions sont intégrables.}$$

D'où l'holomorphie de Γ. ■

But : montrer qu'il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq -n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathscr{P}$. Ce prolongement sera encore noté Γ.

Théorème

Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Etape 1 : montrons que pour tout $z \in \mathscr{P}$, $\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

On cherche donc à écrire maintenant la première intégrale sous forme d'une série. On développe l'exponentielle :

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Il faut maintenant vérifier que l'on peut bien permuter somme et intégrale avec le théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage).

1. $|e^z| = e^{\Re(z)}$

Remarquons que pour $t > 0$, $|t^z| = |e^{z \ln t}| = e^{\Re(z) \ln t} = t^{\Re(z)}$.

On obtient alors, pour $t \in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| |t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1} e^t$.

Comme $\Re(z) > 0$, $\Re(z) - 1 > -1$ et la fonction $t \to t^{\Re(z)-1} e^t$ est intégrable [2] sur $]0,1]$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right| dt < +\infty$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et inverser somme et intégrale.

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

On obtient bien, pour tout $z \in \mathscr{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Etape 2 : Montrons que $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

On utilise le *Théorème sur les séries de fonctions méromorphes*

H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n z \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.

H2) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$. Pour $n > N_K$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.

De plus, pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K$.

Par conséquent, pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!(n-N_K)}$ et donc $\displaystyle\sum_{n > N_K} f_n$ CVN sur K.

Donc, par théorème, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

Etape 3 : On applique le *Théorème d'holomorphie sous le signe intégral* pour conclure.

H1) et H2) sont évidentes pour $f(z,t) = t^{z-1} e^{-t}$.

H3) On utilise la majoration $(\star)$ faite dans la démonstration du Lemme. Et $t \mapsto t^{M-1} e^{-t} \in L^1([1, +\infty[)$.

Donc $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$. Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

■

Notes :

♣ Leonhard EULER (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

2. Il s'agit d'une comparaison avec les intégrales de Riemann. On peut dire que c'est $\leqslant et^{\Re(z)-1}$ qui est intégrable par Riemann.

Densité des polynômes orthogonaux

Laura Gay ◇ Camille Francini

Référence : Beck, Malick, Peyré : Objectif agrégation, 2ème édition p.110 et p.140
Leçons : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 240, 245.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathrm{I}} |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

Définition 2

On note l'espace $L^2(\mathrm{I},\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition

L'espace $L^2(\mathrm{I},\rho)$ est un espace de Hilbert. Les polynômes appartiennent à $L^2(\mathrm{I},\rho)$.
En particulier, il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$) deux à deux et tels que $\deg P_n = n$ (orthogonalisation de Gram-Schmidt). Cette famille s'appelle la *famille des polynômes orthogonaux* associés à la fonction poids ρ.

Théorème (*Densité des polynômes orthogonaux*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\int_{\mathrm{I}} e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{I},\rho)$.

Preuve :

But : Les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée. Il reste donc à montrer qu'elle est totale, donc que $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est dense dans $L^2(\mathrm{I},\rho)$. Or $\mathrm{Vect}((P_n)_n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathrm{I},\rho)$, il faut donc montrer que

$$\mathrm{Vect}((P_n)_n)^\perp = 0$$

Mais, par construction de $(P_n)_n$, on a $\mathrm{Vect}((P_n)_n) = \mathrm{Vect}((X^n)_n)$. On veut donc montrer que $\mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = 0$.
En posant $g_n : x \to x^n$, cela revient à montrer :

Si $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$ vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors $f = 0$.

Dans la suite, $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$ et vérifie $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etape 1 :
Soit $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$. Soit φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que φ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad |f(x)|\,\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I (par définition pour ρ et $f \in L^2(\mathrm{I},\rho)$ pour ρf^2), on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 :

On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x)\rho(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < a/2\}$.

Posons, pour $z \in B_a$ et $x \in \mathrm{I}$, $g(z,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)$.
On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_a, \qquad F(z) = \int_{\mathrm{I}} g(z,x)\,\mathrm{d}x$$

Vérifions que cette fonction est bien définie :
En effet, on a $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}| = \mathrm{e}^{\mathcal{I}m(z)x} \leqslant \mathrm{e}^{|\mathcal{I}m(z)||x|} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}$
Donc, pour $z \in B_a$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que F vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
H1) Pour tout $z \in B_a$, l'application $x \to g(z,x)$ est intégrable (déjà vu)
H2) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, l'application $z \to g(z,x)$ est holomorphe (exponentielle)
H3) Pour tout $z \in B_a$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}\,|f(x)|\,\rho(x)}_{\text{indpt de } z \text{ et intg sur I}}$$

Donc F est bien holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\widehat{\varphi}$.

Etape 3 :

On calcule $F^{(n)}(0)$ pour montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$ alors $f = 0$.

Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_a, \qquad F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en ayant posé $g_n : x \to x^n$, on obtient :

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathrm{I}} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0.
Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On déduit que $\widehat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}} = 0$.
Comme φ est intégrable (vu à l'étape 1), l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$.
Or, ρ est strictement positive donc $f = 0$ sur presque tout I.

■