245

Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ Exemples et applications

$U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction

I - Généralités

1 - définitions, propriétés élémentaires et exemples

déf 1 une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-différentiable si la limite $f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe $\forall a \in U$.

déf 2 : f est dite holomorphe sur U si f est $\mathbb{C}$-différentiable sur U et si f est de classe $\mathcal{C}^1$

Exple 3 : $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable de dérivée $z \mapsto 1$ (sur $\mathbb{C}$)

prop 4 : la somme, la composée, le produit et l'inverse (lorsque celle-ci est définie) d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exple 5 : les fonctions polynomiales ou les fonctions rationnelles sans pôles sont $\mathbb{C}$-dérivables sur $\mathbb{C}$.

déf 6 : f est analytique sur U si f admet un dév. en série entière (D.S.E.) en tout points de U.

Exple 7 : $z \in \mathbb{C}_* \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

prop 8 : une fonction analytique sur U est infiniment dérivable sur U et ses dérivées sont analytiques.

Coro 9 : une fonction analytique sur U est holo sur U.

Exple 10 : $\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n/n!$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

2 - holomorphie et différentiabilité

prop 11 f est dérivable en un pt $a \in U$ ssi f est différent. en a et $df(a)$ est une similitude directe.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Coro 12 : toute fonction holomorphe est différentiable sur $\mathbb{C}$.

C-exple 13 : $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable et non-holomorphe.

Thm 14 (Conditions de Cauchy-Riemann)

Si f est différentiable sur U, sont équivalentes

1. f holomorphe sur U
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$
3. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ où $f = P + iQ$

prop 16 si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si Ω connexe, alors

$$\left. \begin{matrix} f' \equiv 0 \\ \text{sur } \Omega \end{matrix} \right) \Longrightarrow f \text{ constante}$$

II - formule de Cauchy et conséquences

1 - formules de Cauchy

déf 17 : on appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($a \neq b$ dans $\mathbb{R}$)

On dit que γ est un lacet si, de plus, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

déf 18 : soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue sur $\operatorname{Im} \gamma$.

Alors $\int_{\gamma^*} f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) . \gamma'(t)\, dt$

Exple 19 : pour $\gamma : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $R > 0$

Alors $\int_{\gamma^*} \frac{dz}{z} = i(\theta_1 - \theta_0)$

déf 20 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet tq $\mathrm{Im}\,\gamma \cap \{z_0\} = \emptyset$
~~l'on~~ L'indice de ~~z_0~~ γ par rapport à z_0 est :

$$I_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^*} \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$$

Thm 21 (Cauchy) Pour Ω convexe, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
Pour tout lacet γ de Ω, on a :

$$\int_{\gamma^*} f(z)\,dz = 0$$

Thm 22 (formule de Cauchy) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ et γ un lacet à valeurs dans $\Omega \setminus \{a\}$, alors :

$$f(a) \cdot I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^*} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Coro 23 (formule de la moyenne) Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D(z_0, r)}$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,d\theta$$

En particulier, $f(z_0)$ est la valeur moyenne de f sur ∂D

2 - analyticité et inégalité de Cauchy

Thm 24 si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$ alors

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Coro 25 : si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f analytique sur Ω

rem : $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow f$ analytique sur Ω

prop 26 : si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \leq R$

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{où} \quad M(r) = \sup_{z \in \mathcal{C}(z_0, r)} |f(z)|$$

De plus, si l'égalité a lieu pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ et $r < R$ alors $f(z) = \lambda (z - z_0)^{n_0}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. conséquences de la représentation en série entière

Thm 27 : (principe de prolongement analytique)
Si Ω connexe et $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, sont équivalents
(i) $f \equiv 0$ sur Ω
(ii) $f \equiv 0$ sur un voisinage de a
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$

coro 28 Ω connexe et $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f et g coïncident sur un ~~ouv~~ voisinage de Ω, alors $f = g$.

Coro 29 (principe des zéros isolés)
si Ω connexe, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non nulle. L'ensemble $Z(f)$ est une partie localement finie de Ω.

Exple 30 : il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(1/n) = f(-1/n) = \frac{1}{n}$ pour n assez gd.

Thm 31 (Liouville) toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ~~est~~ et bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

App 32 théorème de d'Alembert / ~~Gauss~~ : tout polynome de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

déf 33 si f continue sur Ω, on dit que f vérifie la propriété de la moyenne si pour tout disque $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta$$

exple 34 les fonctions holomorphes vérifiant cette propriété.

Thm 35 (principe du maximum) Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω et si $|f|$ admet un max local en $a \in \Omega$, alors f est constante au voisinage de a.

App 36 : lemme de Schwartz

Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tel que $f(0)=0$ et $\forall z \in D(0,1), |f(z)| \le 1$

Alors $\forall z \in D(0,1), |f(z)| \le |z|$ et $|f'(0)| \le 1$.

De plus, si $|f'(0)| = 1$, ~~alors~~ ou si $\exists z_0 \in D(0,1)\setminus\{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $\forall z \in D(0,1)$, $f(z) = \lambda z$

4)- intégrale de fonctions holomorphes.

Thm 37 (holomorphie sous le signe intégral)

Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$.

Si • $\forall z \in \Omega$, $F(z, \cdot)$ est mesurable
• $\forall t \in T$, $F(\cdot, t) \in \mathcal{H}(\Omega)$
• $\forall K \subset\subset \Omega$, $\exists \mu_K \in L^1(T,\mu)$ tq $|F(z,t)| \le \mu_K(t)$ $\forall (z,t) \in K \times T$

Alors $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\,d\mu(t) \in \mathcal{H}(\Omega)$

DEV 1

App 38 (densité des polynomes orthogonaux)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strict. positive et tq $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < \infty \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}, & \int_I e^{-\alpha|x|} \rho(x)\,dx < \infty \end{cases}$

On peut construire une famille de polynomes $(P_n)_n$ unitaire orthogonaux 2à2 tq $\deg P_n = n$.
En les normalisant, ces polynomes forment une base Hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

III - Théorème des résidus

1)- ~~singularités et méromorphie~~

Thm 39 soient $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Trois cas ~~sont~~ mutuellements exclusifs peuvent se presenter :

(i) f est bornée au voisinage de a et f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur U
↳ a est un pt régulier de f

(ii) $\lim_{|z| \to a} |f(z)| = \infty$ et $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\exists g \in \mathcal{H}(U)$ tel que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ sur $U \setminus \{a\}$
↳ a est un pole de f

(iii) Pour tout voisinage V de a dans U, $f(V \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que a est un pt singulier essentiel de f.

Thm 40 : soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ admettant un pole ~~d'ordre~~ en a. Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ nul en 0 et $g \in \mathcal{H}(U)$ tel que sur $U \setminus \{a\}$, $f(z) = g(z) + P\left(\frac{1}{z-a}\right)$

→ Le degré de P est appellé ordre du pole a de f

→ on appelle résidu de f en a le coefficient $\frac{1}{z-a}$ de P

2)- théorème des résidus de Cauchy

Thm 41 : soit Ω convexe, $a_1, \dots, a_n \in \Omega$ deux à deux distincts. On prend $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_k\}_{k \le n})$ ayant les a_k pour pôles dans Ω.

Soit γ un lacet de Ω tel que $\gamma^* \cap \{a_k\}_{k \le n} = \emptyset$. Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^*} f(z)\,dz = \sum_{k \le n} I_\gamma(a_k) \cdot Res(f, a_k)$$

Exple 42 (formule des compléments)

La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : Re\, z > 0\}$ est prolongeable sur $\mathbb{C} \setminus \{-n\}_{n \in \mathbb{N}}$

↳ $\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}}$ DEV 2

Références :

- Tauvel "analyse complexe"
- Amar et Matheron "analyse complexe" → dev "formule des complements"
- Beck "objectif agregation"
  ↳ dev "densité des polynomes orthogonaux"