245

Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Cadre : Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I- Premières notions d'holomorphie

I.1- $\mathbb{C}$-dérivabilité

Déf 1 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω si $\forall a \in \Omega$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe (notée alors $f'(a)$).

Ex 2 $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$

C-ex 3 $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

Déf 4. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- f est entière si elle est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.

Prop 5 $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre

Ex 6 Les polynômes et les fonctions rationnelles sans pôles sont entières.

I.2- Fonctions usuelles

- Fonctions analytiques

Déf 7 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de tout point, i.e. : $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists (c_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r)$, $r > 0$

Ex 8 $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Prop 9 Une fonction analytique sur Ω est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques.

Coro 10 Analytique sur Ω $\Rightarrow$ Holomorphe sur Ω.

- Exponentielle

Déf 11 L'exponentielle d'un complexe $z = x + iy$ est $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Prop 12 $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée est $z \mapsto e^z$.

Prop 13 $z \mapsto e^z$ est analytique : $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, et la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

- Logarithme (et argument)

Déf 14 $X \subset \mathbb{C}^*$, on appelle détermination du logarithme sur X toute fonction $g : X \to \mathbb{C}$ tq $e^{g(z)} = z$ $\forall z \in X$.

Déf 15 Les déterminations principales du logarithme et de l'argument sont les fonctions Log et Arg tq :
- $\mathrm{Arg}(z)$ est l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi[$.
- $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z)$

Prop 16 La fonction Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

I.3- Holomorphie et différentiabilité

Prop 17 Pour $f : \Omega \to \mathbb{C}$, on a équivalence entre :
(1) f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$
(2) f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe
(3) f est différentiable en a et $df(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Dans ce cas, $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Coro 18 Holomorphe $\Rightarrow$ Différentiable.

C-ex 19 $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable (même $\mathcal{C}^\infty$) mais NON holomorphe.

Prop 20 Holomorphe $\Leftrightarrow$ Différentiable + équations de Cauchy-Riemann

où C-R : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ si $f = u + iv$, (ou $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$)

Ex 21 l'holomorphie de l'exponentielle.

II - Théorie de Cauchy et conséquences

2.1 - Formule de Cauchy

Déf 22 Un chemin est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.
On note $\gamma^* := \gamma([a,b])$ son image.
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ est un lacet.

Ex 23 $\gamma : \theta \mapsto a + Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, est un lacet (R et a fixés)

Déf 24 Si f continue sur γ^* avec γ chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sur $[a,b]$
L'intégrale de f sur γ : $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$.

Ex 25 pour $\gamma : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, $R > 0$: $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = i(\theta_1 - \theta_0)$

2

Prop 26 Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $\gamma^* \subset \Omega$: et $f' \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(v) - f(u)$$

Déf 27 L'indice de $a \notin \gamma^*$ par rapport à γ est :

$$\mathrm{Ind}(a,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz.$$

Prop 28 $\mathrm{Ind}(a,\gamma) \in \mathbb{Z}$.

Thm 29 (de Cauchy, pour un convexe) Ω ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$.
Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ et continue sur Ω Alors :
(1) f admet une primitive holomorphe sur Ω.
(2) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet γ, $\gamma^* \subset \Omega$.

C-ex 30 $\Omega = \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$,
$\to \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{Ind}(0,\gamma) = 1$

Thm 31 (formule de Cauchy pour un convexe) Ω convexe, γ un lacet et $a \in \Omega \setminus \gamma^*$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Alors : $\mathrm{Ind}(a,\gamma)\, f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$

et : $\mathrm{Ind}(a,\gamma)\, f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$

Coro 32 f holomorphe $\Rightarrow$ infiniment $\mathbb{C}$-dérivable.
En particulier, f' est holomorphe.

Thm 33 (Séries de Laurent) Soit f holomorphe dans une couronne :
$\Omega = \{z ;\ a < |z - z_0| < b\}$
Alors il existe une unique suite $(c_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq : $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$ $\forall z \in \Omega$.
et on a convergence normale de la série sur tout compact de Ω.

2.2 - Analyticité

Thm 34 $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$: $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ pour $z \in D(z_0,R)$
avec conv. norm. sur tout compact de $D(z_0, R)$.

Coro 35 Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω, donc f est analytique.

Rem 36 Holomorphe $\Leftrightarrow$ Analytique

Thm 37 (de Morera) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue.
Si $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ $\forall$ triangle $\Delta \subset \Omega$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Thm 38 (Inégalité de Cauchy) $f \in \mathcal{H}(\overline{D}(z_0,R))$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n$ pour $z \in \overline{D}(z_0,R)$
Si $0 \leq r \leq R$ et $M(r) = \sup_{\partial D(z_0,r)} |f(z)|$.
Alors $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$; $\forall n \geq 0$.

Thm 39 (de Liouville) Si f entière : bornée $\Rightarrow$ constante

Coro 40 D'Alembert-Gauss : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Thm 41 (Zéros isolés) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non nulle, $Z(f)$ ses zéros. Ω connexe.
Alors (1) $a \in Z(f)$; $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $g(a) \neq 0$
(2) $Z(f)$ est au plus dénombrable, et ses points sont isolés dans Ω.

Ex 42 Ω ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, il n'existe pas de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq
$f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand.

Thm 43 (Prolongement analytique) Ω connexe.
Si $f = g \in \mathcal{H}(\Omega)$ sur une partie $E \subset \Omega$ ayant un point d'accumulation dans Ω,
Alors $f = g$ sur Ω.

App 44 Calcul de la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2/2}$ (gaussienne).

Thm 45 (Principe du maximum) Ω borné, $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$
Alors
- $f(z) \leq \sup_{\partial\Omega} |f(z)|$, $\forall z \in \Omega$.
- si $|f(z_0)| = \sup_{\partial\Omega} |f(z)|$, $z_0 \in \Omega$, alors f constante sur la composante connexe de Ω contenant a.

Lemme 46 (de Schwarz) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$.
Alors (1) $|f(z)| \leq |z|$ sur $\mathbb{D}$ et $|f'(0)| \leq 1$.
(2) Si $|f(a)| = a$ sur $\mathbb{D}^*$, ou $|f'(0)| = 1$ $\to$ alors $f \equiv \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

App 47 L'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est constitué des $\lambda\varphi_a$ avec $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$
$\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

2.3. Théorème d'intégration

Thm 48 : Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $F : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{C}$. Si F vérifie :

(1) pour tout $z \in \Omega$, $t \longmapsto F(z,t)$ est mesurable ;

(2) pour tout $t \in T$, $z \longmapsto F(z,t)$ est holomorphe dans Ω ;

(3) $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists \, u_K \in L^1(T,\mu)$ tq $|F(z,t)| \leq u_K(t)$, $\forall (z,t) \in K \times T$.

Alors $f : z \longmapsto \int_T F(z,t)\, d\mu(t) \in H(\Omega)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z) = \int_T \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z,t)\, d\mu(t)$

Ex 49 : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ définit une fonction hol. dans le demi-plan $\{Re(z) > 0\}$

App 50 : (Densité des polynômes orthogonaux) DEV 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n p(x)\,dx < +\infty$ et $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\int_I e^{\alpha|x|} p(x)\,dx < +\infty$. Alors la famille des polynômes orthogonaux associée à p forme une base hilbertienne de $L^2(I,p)$.

III - Résidus

3.1. Singularités et méromorphie.

Déf 51 : $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Alors f a une singularité isolée en a. Si f se prolonge en une fonction holomorphe au vois. de a, a est une singularité apparente.

Prop 52 : $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. S'il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $\Omega \cap D^*(a,r)$ alors la singularité a est apparente pour f. ($D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$)

Thm 53 : Soit $a \in \Omega$ et soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Notons $\sum c_n (z-a)^n$ la série de Laurent de f au point a. On a trois cas possibles :

1- a est une singularité apparente $\Leftrightarrow c_n = 0 \;\; \forall n < 0$

2- $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty \Leftrightarrow \exists\, m \geq 1$ tq $c_{-m} \neq 0$ et $c_n = 0 \;\; \forall n < -m$

$\rightarrow$ a est un pôle de multiplicité m de f.

3- $\forall r > 0$, $f(D^*(a,r))$ est dense dans $\mathbb{C} \Leftrightarrow c_n \neq 0$ pour une infinité de $n < 0$ $\rightarrow$ a est une singularité essentielle pour f.

Prop 54 : Avec les mêmes notations, on a équivalence :

(1) f a un pôle d'ordre m en a

(2) $\exists\, r > 0$ tq $D(a,r) \subset \Omega$ et $g \in H(D(a,r))$ tq $\begin{cases} g(a) \neq 0 \\ g(z) = (z-a)^m f(z) \, ; \; \forall z \in D^*(a,r) \end{cases}$

Déf 55 : On appelle fonction méromorphe dans Ω toute fonction $f \in H(\Omega \setminus A)$, où A est fermé discret et tel que tout point de A est un pôle de f. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace de ces fonctions.

Ex 56 : • $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

• $f(z) = e^z/z$.

• Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

3.2. Théorème des résidus.

Déf 57 : Le résidu de f en a, noté $Res(f,a)$, est le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent $\sum_{-m}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ de f au voisinage de a.

Ex 58 : (calcul pratique du résidu)

• a pôle simple de f : $Res(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

Si f donnée au vois. de a par $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$, alors $Res(f,a) = \frac{u(a)}{v'(a)}$.

• a pôle d'ordre m : $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $g(a) \neq 0$ et $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n$

alors $Res(f,a) = c_{m-1}(g) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$ (au DSE de $g(z) = (z-a)^m f(z)$).

Thm 59 (des résidus) : Ω ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ points 2 à 2 distincts de Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un lacet dans Ω dont l'image ne contient aucun des a_k, on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} ind_\gamma(a_k) \cdot Res(f,a_k).$$

3.3. Quelques calculs concrets.

• Formule des compléments : Γ vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ pour $0 < Re(z) < 1$. DEV 2

• Calcul de la transformée de Fourier d'une fraction rationnelle :

$$I(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-|x|}.$$

• $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Annexe :

Pour ε, R vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < R$, notons $\gamma_{\varepsilon R}$ le contour fermé délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{ |z| = \varepsilon, \mathrm{Re}(z) \leq 0 \}$, les deux segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon ; i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon ; -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{ Re^{i\theta} ; \theta \in [-\pi ; \pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R} \}$, où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan\left(\varepsilon / \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \right)$.

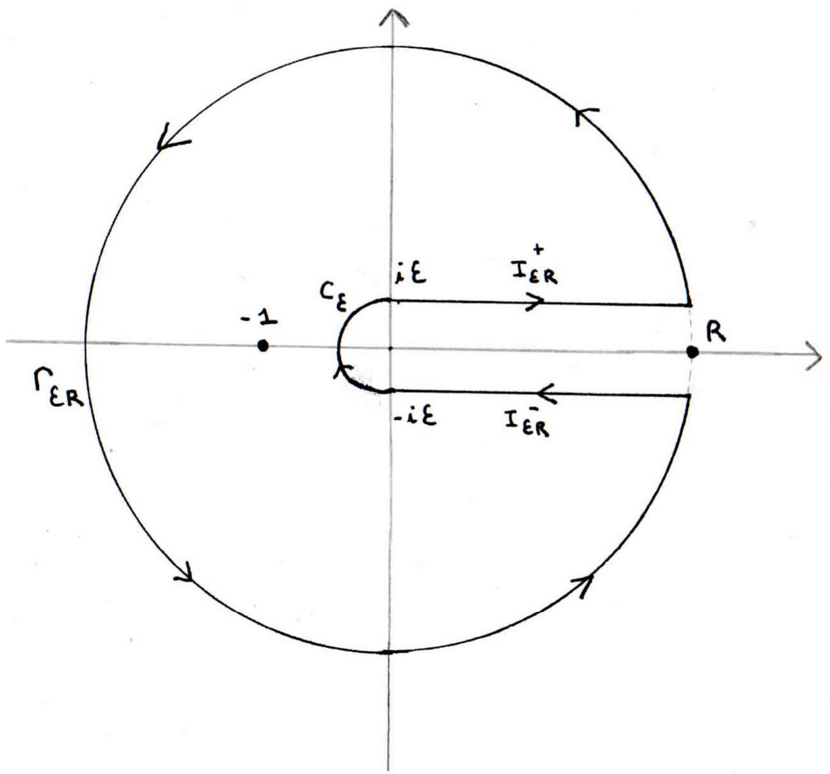

Figure de $\gamma_{\varepsilon R}$

Références :

* Hervé Queffélec et Martine Queffélec - Analyse complexe et applications.
* Éric Amar et Étienne Matheron - Analyse complexe (dev. Formule des compléments).
* Patrice Tauvel - Analyse complexe pour la licence 3.
* V. Beck, J Malick et G. Peyré - Objectif Agrégation (dev. densité des polynômes orthogonaux).