245

Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications

I- Séries entières et fonctions analytiques

a. Séries entières

définition 1: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, la série entière de terme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction qui à $z\in\mathbb{C}$ associe la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ lorsqu'elle est définie.

def 2: Le rayon de convergence d'une série entière est le réel positif r ou $+\infty$ tel que $r = \sup_{\substack{z\in\mathbb{R}^+ \\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}}} |z|$.

Proposition 3: r est le rayon de cvg de la série entière de terme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\iff$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ est convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|<r$

ex 4:
- L'exponentielle complexe, définie par $z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de $+\infty$
- La série entière de terme $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ a son rayon de cvg égal à 1.

Proposition 5: Critère de d'Alembert ; La série entière de terme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow l$ (ou $l\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$) a un rayon de cvg égal à $\frac{1}{l}$ ($\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$)

Proposition 6: Formule de Hadamard. Le rayon de cvg de la série entière de terme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}})}$

Proposition 7:
- La somme et le pdt de deux séries entières de rayon r_1 et r_2 sont définis et sont des séries entières de rayon de cvg supérieur au $\min(r_1, r_2)$
- Soit deux séries entières de terme $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, tels que $b_0=0$ on note $f: z\mapsto \sum a_n z^n$, $g: z\mapsto \sum b_n z^n$ alors $f\circ g$ est une série entière de rayon de cvg r tq $r \geq \sup_t \{t>0, \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| t^n < r_f\}$ ou r_f est le rayon de cvg de f.

Proposition 8:
- La série entière de terme $(a_n)_n$ a un inverse multiplicatif si et seulement si $a_0\neq 0$, c'est une série entière.
- Soit une série entière de terme $(a_n)_n$ tel que $a_0=0$ et $a_1\neq 0$ alors elle admet un inverse pour la composition.

ex 9:
- l'exponentielle complexe admet un inverse multiplicatif : $z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$
- La série entière $z\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$ a un inverse pour la composition : $z\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n z^n$

b. fonctions analytiques

def 10: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. f est une fonction analytique de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}$, si pour tout $z_0\in\mathcal{U}$ il existe une série entière de rayon de convergence $r>0$ et de terme $(a_n)_n$ tel que pour tout $z\in D(z_0,r)$, (r tq $D(z_0,r)\subset\mathcal{U}$), $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$

Prop 11: La série entière de terme (a_n) est unique, on l'appelle développement en série entière de f en z_0.

Remarque 12:
- Les propriétés des séries entières donnent la stabilité de la somme, du produit et l'existence d'un inverse multiplicatif sur $\mathcal{U}-f^{-1}(\{0\})$
- Si g est analytique sur V et $g(V)\subset \mathcal{U}$ on a alors $f\circ g$ analytique grâce aux séries entières et on aura théorème d'inversion locale.

ex 13: On a ainsi que $f: z\longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Théorème 14: (zéros isolés) Une fonction f analytique dont l'ensemble des zéros a un point d'accumulation est identiquement nulle.

ex 15: Logarithme : Le théorème d'inversion locale nous donne l'existence local de fonctions analytiques f tel que $e^{f(z)} = z$ (ou e est l'exponentielle) or l'expression précédente nous donne $\mathrm{Im}(f(z)) = \arg(z)\,[2\pi]$ $\left(= \frac{z}{|z|}\right)$ $\ln(\mathrm{Re}(f(z))) = |z|$.
Les expressions sont de la forme $z\longmapsto \ln(|z|) + i\theta(z)$ avec θ détermination de l'argument. Des arguments de continuité empêchent une existence d'un logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

II- Holomorphie

a. $\mathbb{C}$-dérivabilité et définitions

def 16: ($\mathbb{C}$-dérivabilité), $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ ($\mathcal{U}$ ouvert) est dérivable au point $a\in\mathcal{U}$ si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $h\in\mathbb{C}-\{0\}$ (tel que $a+h\in\mathcal{U}$) admet une limite lorsque $h\to 0$ on la note $f'(a)$
(on aura alors si f a une limite en a $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|)$)

def 17: (Fonction holomorphe) ; $f: \mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ($\mathcal{U}$ ouvert) est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathcal{U}$; On note l'ensemble des fct holomorphes sur $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.

prop 18: (Condition de Cauchy-Riemann)
Soit $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x+iy \longmapsto f(x+iy)$, on note $u: (x,y) \longrightarrow \mathrm{Re}(f(x+iy))$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), $v: (x,y) \longrightarrow \mathrm{Im}(f(x+iy))$
alors f est $\mathbb{C}$ dérivable en ($z_0 = x_0+iy_0$) si et seulement si $f_{\mathbb{R}}: (x,y)\mapsto (u(x,y), v(x,y))$ est $\mathbb{R}^2$ différentiable en (x_0,y_0) et que
$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

def 19: On définit $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Proposition 20 : (*) est équivalent à $\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

$\cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 0$

$\cdot$ On a de plus $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$

Proposition 21 : La somme, le produit et la composition de fonction holomorphe donne une fonction holomorphe

ex 22 : $\cdot$ Les fonctions analytiques, et donc les séries entières sont des fonctions holomorphe.

$\cdot$ C-ex : les fonctions conjugué et module ne sont pas $\mathbb{C}$-dérivable et donc non holomorphe.

définition 23 : Soit $f : U \to \mathbb{C}$ sur U ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que f admet une primitive F. s'il existe F holomorphe de U dans $\mathbb{C}$ tel que $F' = f$ sur U.

b. Intégration sur un chemin

déf 24 : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, un chemin est une application continue γ d'un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeur dans U. $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont l'origine et l'extrémité du chemin. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que le chemin est fermé, ou qu'il s'agit d'un lacet. (Dans la suite γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux)

ex 25 : Le paramétrage du cercle $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un chemin fermé.

déf 26 : L'intégrale d'une fonction f définie sur U ouvert de $\mathbb{C}$ sur un chemin γ de U est : $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Prop 27 : Soit U ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ continue. f admet une primitive sur U si et seulement si pour tout γ fermé dans U. $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Remarque 28 : Si U est convexe on a f continue admet une primitive si et seulement si pour tout triangle Δ inclu dans U. $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

ex 29 Soit $f \begin{array}{l}\mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z}\end{array}$ $\qquad \int_{\partial D} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta = 2i\pi$

Donc $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ (il n'existe pas de logarithme)

c. Théorème de Cauchy

prop 30 : f continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ / Δ un triangle de U alors $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$
holomorphe sur $U \setminus S$ avec S fini

Théorème 31 (de Cauchy) : Soit f holomorphe sur U convexe, γ un chemin fermé de U. alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$

d. Indice et formule de Cauchy :

Prop 32 Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin fermé ($\mathcal{C}^1$ par morceaux) et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ est l'indice de γ par rapport à z_0

Théorème 33 (formule de Cauchy) :

Soit U ouvert convexe et γ chemin fermé de U, f holomorphe sur U.

alors $\forall z \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ $2i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) f(z) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$

Proposition 34 : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, toute fonction f holomorphe dans U est analytique dans U, (les fonctions holomorphes sont celles analytiques) elles sont donc $\mathcal{C}^\infty$.

III - Propriétés des fonctions holomorphes

a. Zéros

déf 35 : f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ admet un zéro d'ordre m en z_0 si $\forall i \in [\![0, m-1]\!]$ $f^{(i)}(z_0) = 0$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Prop 36 : Si f admet un zéro d'ordre m en z_0, alors sur la composante connexe de U de z_0, f se factorise sous la forme $(z - z_0)^m g(z)$ ou $g \in \mathcal{H}(U)$ et $g(z_0) \neq 0$

Rmq 37 : Le théorème des zéros isolés nous donne que $(\mathcal{H}(U), +, \cdot)$ est un anneau commutatif intègre.

b. Inégalités de Cauchy

Théorème 38 : Soit f holomorphe sur U ouvert de $\mathbb{C}$, soit $z_0 \in U$ et soit $R > 0$ tq $D(z_0, R) \subset U$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $r \in]0, R[$; $\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ avec $M(r) = \sup_{|z - z_0| = r} |f(z)|$

Corollaire 39 : (Liouville) Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, bornée, alors elle est constante

App 40 (D'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine complexe.

c. Holomorphie sous le signe intégrale.

Théorème 41 : Soit $f : (z, x) \mapsto f(z, x)$ de $U \times E \to \mathbb{C}$ où U ouvert de $\mathbb{C}$, tel que :

- $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z, x)$ est mesurable
- Pour presque partout $x \in E$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur U de dérivée f'
- Il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ tq $\int \varphi d\mu < +\infty$ et $\forall z \in U$, pour μ-presque tout $x \in E$ $|f(z, x)| \leq \varphi(x)$

alors $F : z \mapsto F(z) = \int f(z, x)d\mu(x)$ est holomorphe sur U

et f' est intégrable et $F'(z) = \int f'(z, x)d\mu(x)$

Dev 1 : Γ : $\mathrm{Re}(z) > 0$ $z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ est holomorphe et se prolonge en une fct holo sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

d. principe du maximum:

Théorème 42: (pcp du maximum local)
Soit f holomorphe sur U ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ tels que $|f|$ admet un maximum en a, Alors f est constante au voisinage de a.

Remarque 43: Le théorème des zéros isolés nous donne f constante sur la composante connexe de a dans U.

Dev 2: Lemme de Schwarz: Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe telle que $f(0)=0$, alors
(i) $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$
(ii) Si il existe $z_0 \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ tq $|f(z_0)| = |z_0|$ ou $|f'(0)| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tq $f(z) = e^{i\theta} z$.

Biholomorphisme du disque: Notons pour $a \in \mathbb{D}$, $\phi_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$
Les biholomorphismes de $\mathbb{D}$ sont de la forme $z \mapsto e^{i\theta}\phi_a(z)$ où $\theta \in \mathbb{R}$

IV - Singularités:

a. Premiers pas

def 44: Soit $f : U\setminus\{s\} \to \mathbb{C}$ où $s \in U$,
- s est une singularité de f si f est holomorphe sur $U\setminus\{s\}$
- On dit que s est une singularité apparente (ou artificielle) si f se prolonge continûment en s.
- On dit que s est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si $z \mapsto (z-s)^m f(z)$ a une singularité apparente en s (m plus petit possible).
- si s est une singularité ni apparente, ni un pôle, on dit que c'est une singularité essentielle.

ex 45:
- $z \mapsto \frac{z}{z}$ a une singularité apparente en 0.
- $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 en 0
- $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en 0.

Proposition 46:
- Si s est un pôle d'ordre m, il existe $(a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}) \in \mathbb{C}^m$ unique ($a_{-m} \neq 0$) tel que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-s)^k}$ possède une singularité apparente en s.
- s est une singularité essentielle si et seulement si pour tout disque $D(s,r) \subset U$ ($r>0$), $f(D(s,r)\setminus\{s\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Proposition 47: Si f holomorphe sur $U\setminus\{s\}$, où s est une singularité apparente ou un pôle; f admet un développement de la forme
$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-s)^k$$
on l'appelle développement en série de Laurent.

b. Résidus

def 48: Soit f holomorphe sur $U\setminus\{s\}$, soit $r>0$ tel que $D(s,r) \subset U$
Le résidu de f en s est $\mathrm{res}_s(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(s,r)} f(z)dz$

Proposition 49 • De façon plus générale pour tout γ chemin de $D(s,r)^*$, fermé
$$\mathrm{Ind}_\gamma(s)\,\mathrm{res}_s(f) = \int_\gamma f(z)dz.$$

Remarque 50:
- Si f a une singularité apparente en s, $\mathrm{res}_s(f) = 0$
- Si f a un pôle en s, $\mathrm{res}_s(f) = a_{-1}$ coef de la série de Laurent.

Théorème des résidus (51):
Soit U ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $S \subset U$ fermé et discret, $f : U\setminus S \to \mathbb{C}$ holomorphe.
Soit γ un chemin fermé de $U\setminus S$, alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{s\in S} \mathrm{Ind}_\gamma(s)\,\mathrm{res}_s(f)$$

Application 52:
La loi de Cauchy $X \sim \mathcal{C}(0,1)$ de fonction de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ a pour fonction caractéristique $E(e^{i\omega X}) = e^{-|\omega|}$

Proposition 53: (thm de l'indice)
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, f admettant des singularités polaires seulement sur U, holomorphe. Soit C un cercle orienté positivement inclus dans U et ne rencontrant ni pôle ni zéro de f. alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \#\{\text{zéro dans } C \text{ avec ordre}\} - \#\{\text{pôle dans } C \text{ avec ordre}\}$$

c. Méromorphie

Def 54: Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. f est une fonction méromorphe de U.
Si f est holomorphe sur $U-P$ où P est fermé discret et les singularités non apparentes de f sont des pôles.
On note l'ensemble de ces fonctions $\mathcal{M}(U)$

Prop 55: f est méromorphe sur U si elle est localement quotient de deux fonctions holomorphes.

Prop 56: Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. $(\mathcal{M}(U), +, \times)$ est un corps. C'est le corps des fractions de $\mathcal{H}(U)$.

Ex 57: Le prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$ est méromorphe. (i.e. ses singularités sont des pôles).