245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et Applications.

Dans toute la suite, sauf si précisé, on note : Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin de Ω, $D(a,r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r. f sera une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

I/ Des polynômes vers les fonctions analytiques

1) Polynômes complexes :

Def 1 : On appelle polynôme (rigoureusement fonction polynomiale) une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $P(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$. Si P n'est pas nul, on suppose $a_n \neq 0$ et n est appelé degré de P.

Def 2 : On dit qu'une fonction est holomorphe en a si elle possède une dérivée au sens complexe, ie : $P'(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{P(a+h) - P(a)}{h}$ existe.

On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Th 3 : Tout polynôme est infiniment holomorphe sur $\mathbb{C}$ et l'on a $P^{(k)}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{j \geq k} \frac{j!}{(j-k)!} a_j z^{j-k} \\ 0 \text{ si } k \geq n+1 \end{cases}$

On a également $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$

Th 4 : Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$.

1) $|P(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$
2) Si $a \in \mathbb{C}$, a n'est pas un maximum local.
3) Si $a \in \mathbb{C}$, $P(a) \neq 0$, a n'est pas un minimum local.
4) P possède une racine dans $\mathbb{C}$.

Coro 5 : (D'Alembert-Gauss) Tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé.

Th 6 : (Gauss-Lucas) Les racines de P' sont dans le polygone convexe engendré par les racines de P.

2) Séries entières :

Def 7 : Une série entière est une série de terme général $a_n z^n$. Il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que si $|z| < R$, la série converge absolument et si $|z| > R$, elle diverge (grossièrement).

Lem 8 : (Abel) Si une série entière converge en z_0, elle converge absolument pour $|z| < |z_0|$.

Prop 9 : (Hadamard) On a $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$

Prop 10 : (d'Alembert) On a $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Th 11 : (Convergence uniforme) Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence.

Ex 12 : $e^z = \sum\limits_{n=0} \frac{z^n}{n!}$ $(R = \infty)$

$\frac{1}{a-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ $(R = |a|)$

3) Fonctions analytiques :

Def 13 : On dit que f est analytique en a s'il existe $\delta > 0$ et une série entière $\sum c_n(a) z^n$ de rayon de convergence $\geq \delta$ telle que pour $|z-a| < \delta$, $f(z) = \sum c_n(a)(z-a)^n$.

On note $A(\Omega)$ les fonctions analytiques sur Ω.

Th 14 : Soit $\sum a_n z^n = S$ une série entière

1) S est holomorphe et $S'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$

2) S est analytique et $S(z) = \sum \frac{S^{(n)}(a)}{k!}(z-a)^k$

Th 15 : (Zéros isolés) Soit $f \in A(\Omega)$, soit $Z(f) = \{a \in \Omega / f(a) = 0\}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $g \in H(\Omega)$ tel que $f(z) = (z-a)^k g(z)$ et $g(a) \neq 0$. $Z(f)$ et ainsi au plus dénombrable à points isolés.

Th 16 : Soit $f, g \in A(\Omega)$, si $f = g$ sur un ouvert non vide de Ω, alors $f = g$ sur Ω (prolongement analytique). (ici Ω est connexe)

II / Théorie de Cauchy :

1) $\mathbb{C}$-dérivabilité :

Th 17 : (Cauchy-Riemann) Une fonction f est holomorphe si et seulement si $f : (x,y) \mapsto f(x+iy)$ est différentiable et vérifie $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$.

Def 18 : Soit γ_1, γ_2 deux courbes de $[-1,1]$ dans Ω dérivables en 0 qui se coupent en $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et telles que $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$. On appelle angle orienté entre γ_1 et γ_2 en z_0 celui entre les vecteurs $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$.

Def 19 : (Application conforme) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 telle que $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est inversible. On dit que f est conforme en z_0 si l'angle entre $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(z_0)$ est égal à l'angle entre γ_1 et γ_2 en z_0.

Lem 20 : Soit $f \in H(\Omega)$ étant un isomorphisme conforme, alors $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Th 21 : Les applications conformes en $z_0 \in \mathbb{C}$ sont les fonctions holomorphes en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$.

Th 22 : Si f est holomorphe, f' est holomorphe.

Th 23 : Si 1) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable
2) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe
3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$

Alors : $F : z \mapsto \int_X f(z,x)\, d\mu$ est holomorphe et $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\, d\mu$

Th 24 : Soit $\mathbb{D} = B(0,1)$ et $H = L^2(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D})$ appelé espace de Bergman du disque unité. Il s'agit d'un espace de Hilbert dont une base hilbertienne est donnée par $\left\{ e_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \right\}$ (dev 1)

2) Intégrale curviligne

Def 25 : Un chemin est une application $\mathcal{C}^1([a,b])$. Deux chemins sont dits équivalents s'il existe f bijective $\mathcal{C}^1$ croissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ f$.

Def 26 : Si f est continue, on appelle intégrale de f selon γ : $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

Prop 27 : Si γ et τ sont positivement équivalents :
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\tau f(z)\,dz$$

Prop 28 : Si γ est un chemin de u à v et $f \in H(\Omega)$, alors $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(v) - f(u)$

Def 29 : (Indice) On appelle indice de $a \in \mathbb{C}$ par rapport à γ : $I(a,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ si γ est un chemin fermé.

Th 30 : 1) $I(a,\gamma) \in \mathbb{Z}$

2) $a \mapsto I(a,\gamma)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$

3) Théorème et formule de Cauchy :

Th 31 : Soit Δ un triangle plein, $\Delta \subset \Omega$, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. On a : $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$
(Goursat)

Th 32 : Si Ω est convexe, $f \in H(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, alors :
1) f admet une primitive sur Ω
2) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout chemin γ fermé dans Ω

Th 33 : (Cauchy local) Si $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$ de bord positivement orienté γ, paramétré par $\gamma(t) = a + re^{it}$. $f \in H(\Omega)$. Alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad (\forall z \in D(a,r))$

Th 34 : (Equivalence) $H(\Omega) = A(\Omega)$

4) Conséquences :

Th 35 : (Morera) Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle Δ de Ω, alors $f \in H(\Omega)$.

Th 36 : (Inégalité de Cauchy) Si f est holomorphe au voisinage de $\bar{D}(a,R)$ et $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$ $(|z-a| \leq R)$ Soit $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$ Alors $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ $(0 \leq r \leq R)$

Th 37 : (Liouville) Si $f \in H(\mathbb{C})$ est bornée, elle est constante.

Th 38 : (Principe du maximum) Si Ω est borné et $f \in H(\Omega)$, soit $M = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. Alors

Lem 39 : (Schwarz) Soient $R, M \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in H(D(0,R))$ avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$.

1) $f(z) \leq \frac{M|z|}{R}$ et $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$

2) Si on a égalité en un point $\neq 0$, alors $f(z) = uz$ où $|u| = \frac{M}{R}$

III/ Théorie des résidus

Def 40 : Si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, a est une singularité effaçable s'il existe $g \in H(\Omega)$, $f(z) = g(z)$ pour $z \in \Omega \setminus \{a\}$.

Def 41 : Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est un pôle d'ordre m s'il existe $c_{-1}, \dots, c_{-m}$ tel que $f(z) - \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ soit une singularité effaçable en a. On note $c_{-1} = Res(f,a)$.

Def 42 : f est dite méromorphe s'il existe $A \subset \Omega$ tel que A soit à points isolés, $f \in H(\Omega \setminus A)$ et f a un pôle en chaque point de A

Prop 43 : Si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, si f est bornée dans un voisinage pointé $V \setminus \{a\}$, alors a est une singularité effaçable pour f.

Prop 44 : Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. f présente un pôle en a ssi $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$. L'ordre du pôle est la multiplicité de a comme 0 de $1/f$.

Prop 45 : Si $f, g \in H(\Omega)$, a est un zéro simple de g et $f(a) \neq 0$, alors pour $h = f/g$, $Res(h,a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

Th 46 : (Résidus) Soit f méromorphe sur Ω et A ses pôles. Soit γ un cycle homologue à 0 ne rencontrant pas A, alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in A} I(a,\gamma) Res(f,a)$

Th 47 : (Compléments) Soit $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$. $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Alors $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et Γ est holomorphe. De plus si $0 < Re(z) < 1$:
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (Dev 2)

Th 48 : (Rouché) Soit γ un cycle homologue à 0. Soient $f, g \in H(\Omega)$. Si $[z \in Im(\gamma) \Longrightarrow |g(z)| < |f(z)|]$. Alors $Z(f) = Z(f+g)$