NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 246 - Séries de Fourier, exemples et applications

Autre sujet :

I - Définitions et premières propriétés

CADRE :

[Z-Q] 69 • $L^p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, $f \in L^p([0,2\pi], \frac{dt}{2\pi})\}$ qu'on munit de $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

• C : ensemble f° continues 2π-périodiques de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

1°) Définitions.

[Gou] 258 **Def :** Pour $f \in L^1$, on définit les coefficients de Fourier de f par :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt$.

On notera $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ où $e_n : x \mapsto e^{inx}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Rq : ⇝ f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$ $\forall n \geq 1$

⇝ f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Prop : Les coefficients de Fourier vérifient :

- $\forall n \geq 0$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$
- $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

Rq : Compte tenu de cela, on a

$$S_N(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n(f)\cos(n\cdot) + b_n(f)\sin(n\cdot)\right]$$

Exemples :

[Gou] 261 $\boxed{1}$ $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie sur $[0,2\pi]$ par $f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. $b_n(f_1) = 0$ $\forall n \geq 1$, $a_0(f_1) = \frac{4}{3}$ et $\forall n \geq 1$, $a_n(f_1) = 4\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$.

$\boxed{2}$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π périodique, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = -\frac{x}{\pi}$. f_2 impaire, $a_n(f_2) = 0$.

$b_{2n}(f) = \frac{1}{2n\pi}$ et $b_{2n+1}(f) = \frac{-1}{\pi(2n+1)}$

$\boxed{3}$ $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, $x \in]-\pi, \pi]$, [X-Ens] 297

$f_3(x) = \exp\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ alors $c_n(f) = (-1)^n \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{1 - 2i\pi n}$

2°) Propriétés des coefficients de Fourier

Prop : $f \in L^1$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, on a [Z-Q] 72

- $c_n(f(-\cdot)) = c_{-n}(f)$
- $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
- $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ où $\tau_a f = f(\cdot + a)$
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
- Si de plus f est dans C et C^1-pm, alors $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

Lemme (de Riemann-Lebesgues) [O-A] 126

$f \in L^1 \Rightarrow c_n(f) \to 0$ lorsque $|n| \to +\infty$

Ex : On le vérifie bien sur $c_n(f_1)$, $c_n(f_2)$ et $c_n(f_3)$.

3°) Convolution.

Def : $f, g \in L^1$. $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy$ [O-A] 125

Ex : Si on note $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$, alors on a pour $f \in L^1$, $D_N * f = S_N$

Prop : $f \in L^1$, $n \in \mathbb{Z}$, $f * e_n = c_n(f) e_n$

[O-A] 125

Rq: $\Phi_f : L^1 \to L^1$ opérateur de convolution, alors $g \mapsto g * f$ en vecteur propre pour les Φ_f.

II. À propos des convergences.

1°) Convergence au sens de Césaro.

Def: $N \in \mathbb{N}$, $f \in L^1$, $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

[Z-Q] 76 [O-A] 127

Rq: σ_N: moyenne de Césaro de (S_n).
- (S_n) converge au sens de Césaro si (σ_N) converge.
- Condition nécessaire à la convergence de (S_n) est que (σ_N) converge.

Def: $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ (noyau de Dirichlet)

$K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$ (noyau de Féjer)

Prop: (relatives aux noyaux)
- $S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$.
- $D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} x\right)}{\sin(x/2)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2}\right)^2 \geq 0$

  $\hookrightarrow \|K_N\|_1 = 1$.

THME: de Féjer

DEV 1

1. Si $f \in C$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\forall N \in \mathbb{N}$ et
$\lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$
2. Si $f \in L^p$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$, $\forall N \in \mathbb{N}$ et
$\lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Applications:

[Z-Q] 86

1. $f, g \in L^1$, $(c_n(f))_n = (c_n(g))_n \iff f = g$ p.p.
Si de plus f et g sont continues, l'égalité est sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème de Weierstrass: Toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes.

2°) Convergence de la Série de Fourier

But, remonter à la convergence de $S_N(f)$.

THME: $f \in L^1$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}$, alors: [O-A] 129 130

1. si f continue, $S_n(f)$ converge uniformément vers f;
2. si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, $S_n(f)$ converge vers f pour $\|.\|_p$;
3. si f admet à la fois une limite à droite et à gauche en x_0, alors
$S_N(f)(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$.

THME (de Dirichlet)

Si $f \in L^1$ admet en pt x_0 à la fois limite à droite et limite à gauche, et si
$h \mapsto \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]$
alors $S_N(f)(x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$

Exemple: fonction signal $f_{|]-\pi,\pi[}(t) = 1_{|t|<\varepsilon}(t)$ et 2π-périodique pour $\varepsilon \in]0,\pi[$. [Z-Q] 91
Thme de Dirichlet $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}}$ $(a = 2\varepsilon)$

Application: [X-ENS] 297

Trouver le DSE de $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$. Grâce au thme de Dirichlet à $\varphi_z : x \mapsto \exp\left(\frac{z x}{2\pi}\right)$ $(z \notin 2i\pi\mathbb{Z})$ en π.

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}$$

THME (de la convergence normale) [O-A] 130

Si f est continue, C^1pm et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.
En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \longrightarrow f(x)$.

Exemple: Fonction triangle: $f_t(x) = \begin{cases} t & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$
2π-périodique impaire.

Alors $\left| \begin{array}{l} f_E(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)x \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ (convergence normale)

Application: avec f_1 précédemment définie, $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ pm.

[GOU] 261 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$.

$$x = \pi \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Rq: Il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

[GOU] 264 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire 2π-périodique :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right] \quad \text{sur } [0,\pi].$$

3°) Cadre L^2

[O-A] 123 En munissant L^2 du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, on fait de L^2 un espace de Hilbert et $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ pour $f \in L^2$.

On a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ et de plus la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

THME: (Parseval) L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^2 \to \ell^2 \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie bijective. En particulier, on a l'égalité de Parseval $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

[O-A] 124 Rq: Pour passer de la convergence de σ_N à celle de S_N, on a pas besoin d'hypothèse supplémentaire car $\|S_N(f) - f\|_2 \leq \|\sigma_N(f) - f\|_2$

[GOU] 261 Ex: Parseval à $f_1 \implies \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III. Applications de la Théorie

1°) Régularité

- $\mathcal{C}^k = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (f est $\mathcal{C}^k$ 2π-périodique) [Z-Q] 98
- $S_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \lim_{|n|\to+\infty} |a_n n^k| = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*\}$ ensemble des suites à décroissance rapide.

Prop: 1. $f \in \mathcal{C}^k \implies \lim_{|n|\to+\infty} n^k c_n(f) = 0$

2. $k \geq 2$ et $c_n(f) = O(|n|^{-k}) \implies f \in \mathcal{C}^{k-2}$

3. $f \in \mathcal{C}^\infty \iff (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in S_0$.

2°) Calculs de Sommes.

Rq: On a déjà calculer $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.

Ex: Dirichlet à f_1 en $x = 0$ [GOU] 261

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ex: $u \in]0,1[$, Série de Fourier de $f(x) = \cos(ux)$ sur $[-\pi,\pi]$ et 2π-périodique fournit [GOU] 262

$$g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2-n^2} = \pi \cotan(\pi u) - \frac{1}{u}.$$

3°) Formule Sommatoire de Poisson.

[GOU] 272 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ tq $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ quand $|x| \to +\infty$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ ($\hat{f} = TF(f)$)

App: $a > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \cotanh \pi a$.

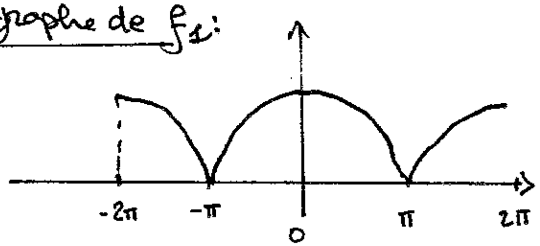
4°) Résolution de l'Equation de la chaleur. [DEV2]

[X-ENS] Tome 4 $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, $\mathcal{C}^1$ p.m et 2π-périodique. Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(0,x) = u_0(x)$ admet une unique solution continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et 2π-périodique $\forall t \geq 0$.

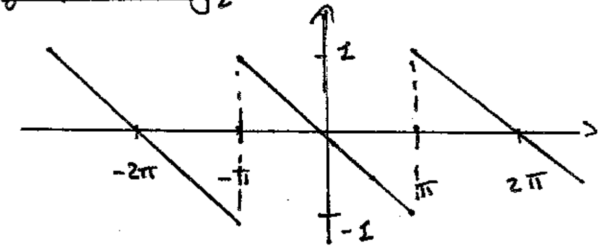
Rq: si $u_0 \not\equiv$ cste, alors il n'y a pas de solut° bornée sur $\mathbb{R}^2$

ANNEXES

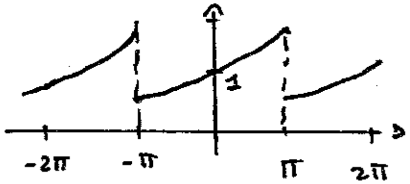
graphe de f_1:



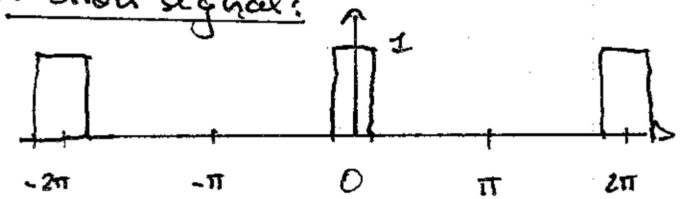
graphe de f_2:



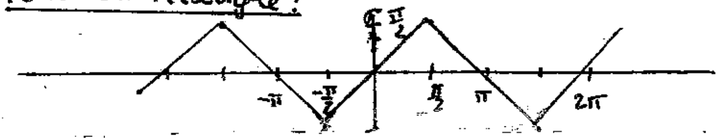
graphe de f_3:



Fonction signal:



Fonction triangle:



Références:

- [GOU]: X. Gourdon, Analyse (2° ed pour les pages)
- [O-A]: Objectif-Agrégation.
- [Z-Q]: Zuilly-Queffélec (4° ed pour les pages)
- [X-Ens]: Oraux X-Ens 2 (analyse)
- [X-Ens]: " " 4 (que pour dev 2)