146

Séries de Fourier. Exemples et Applications.

Cadre : On considère les fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques, ou encore de $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

I Coefficients de Fourier

def 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, les coefficients de Fourier de f sont : $\forall n \in \mathbb{Z}$: $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$

def 2 : $\forall n \in \mathbb{Z}$ $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{inx}$.

def 3 : Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. La série de Fourier de f :
$\forall n \in \mathbb{Z}$ $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$

prop 4 : (i) les c_n sont linéaires.
(ii) $\check{f}(t) = f(-t)$, alors $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$
(iii) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ (iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
(v) $\tau_s f : t \mapsto f(t+s)$, $c_n(\tau_s f) = e^{ins} c_n(f)$

lemme 5 : lemme de Riemann-Lebesgue.
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $c_n(f) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$

prop 6 : Si $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $f \in C(\mathbb{T})$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

prop 7 : Soit $f \in C(\mathbb{T})$. $k \in \mathbb{N}^*$
(i) $f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow \left(|n|^k c_n(f) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0\right)$
(ii) $c_n(f) \in O\left(\frac{1}{|n|^{k+2}}\right) \Rightarrow f \in C^k(\mathbb{T})$
(iii) si f est continue et C^1 par morceaux : $c_n(f') = in\, c_n(f)$
(iv) ($c_n(f)$ à décroissance rapide) $\Leftrightarrow$ ($f \in C^\infty$)

Ex : → si $P = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$ (polynôme trigonométrique)
alors $c_k(P) = a_k$ ($a_k = 0$ pour $|k| > n$)
→ si f est paire alors $c_n = c_{-n}$
→ si f est impaire alors $c_n = -c_{-n}$.
→ $f = |\sin t|$, $c_n = \frac{(-1)^n + 1}{1-n^2}$.

II théorèmes de Convergence

$S_n(f)$ CV ? si oui, en quel sens ?
quel est le lien entre la limite et f ?

def 8 : noyau de Dirichlet :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$.

Rq : $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_n(f) = f * D_n$.

prop 9 : $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}$,

thm 10 : Théorème de Dirichlet
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(t_0^-)$ et $f(t_0^+)$ existent et si $h \mapsto \frac{1}{h}\left(f(t_0+h) - f(t_0^+) + f(t_0-h) - f(t_0^-)\right)$ est bornée au $\mathcal{V}(0)$.
alors $S_n(f)(t_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right)$

thm 11 : Si f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{T}$, alors $(S_n(f))_n$ converge normalement vers f sur $\mathbb{T}$

def 12 : noyau de Féjer.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$.

Rq : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\sigma_n(f) := f * K_n$.
$\sigma_n(f)$ est alors la moyenne de Cesàro des $S_k(f)$, $0 \leq k \leq n$

prop 13 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in]0, \pi[$
(i) $K_n(x) \geq 0$ (ii) $K_n(x) = K_n(-x)$
(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$ (iv) $\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\,dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ex 14 : il existe f 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

Thm 15 : théorème de Féjer.
→ si $f \in C^0(\mathbb{T})$, alors
(i) $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur $\mathbb{T}$
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

→ si $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors
(i) $\|\sigma_n(f) - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
(ii) $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$

cas particulier de L^2 :

def 16 : L^2 est muni du produit scalaire :
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

prop 17 : $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

prop 18 : (i) $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$
(ii) $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $F_n = \mathrm{Vect}((e_k)_{|k| \leq n})$
(iii) $\|S_n(f) - f\|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
(iv) $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

théorème 19 : théorème de Parseval.
Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Appl 20 : • calcul de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$
grâce à $g : x \mapsto \frac{1}{2}(\pi - x)$; si $x \in]0, 2\pi[$
2π-périodique.
• calcul de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$
grâce à $h : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $]-\pi, \pi[$
2π-périodique.

III Autres applications

historiquement, Fourier avait pour but la résolution de l'équation de la chaleur :

Appli 21 : Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. $\boxed{\text{DVP1}}$

alors il existe une unique fonction $u : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et 2π-périodique par rapport à x ; solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

[XENS]

Appli 22 : résolution d'une EDO :

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = |\sin(t)|.$$

déf 23 : Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi xy} dx$.

$I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$BL^2 := \{ u \in L^2(\mathbb{R}), \ \mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset I \}$

thm 24 : (i) BL^2 est un espace de Hilbert

(ii) $\forall u \in BL^2$, $\exists \tilde{u} \in C(\mathbb{R})$, $u = \tilde{u}$ p.p., $\tilde{u}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

(iii) $(x \mapsto \mathrm{sinc}(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2. $\boxed{\text{DVP2}}$

(iv) $\forall u \in BL^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \,\mathrm{sinc}(x-k)$

la convergence est uniforme et au sens de L^2

(théorème d'échantillonnage de Shannon) [WIL]

thm 25 : (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que

* $\exists \Pi \geq 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}. \ |F(x)| \leq \Pi (1+|x|)^{-\alpha}$
* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$

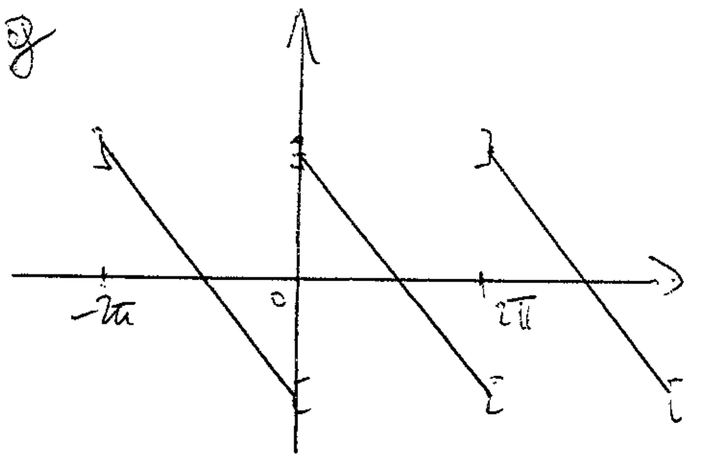
alors on a la relation (formule de Poisson).

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)$$

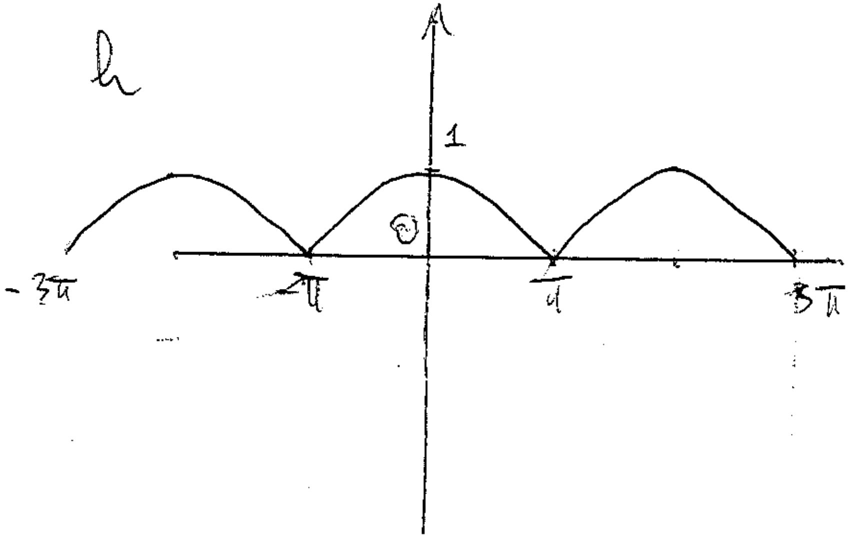
Appli 26 : pour $a \geq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a)$

Annexe 20

g



h



Références :

sauf mention contraire :
Zuily - Queffélec, analyse pour l'agrégation.
[WIL] Analyse harmonique réelle Willem.
[XENS] Oraux X-ENS Francinou, Gianella, Nicolas

Développement : étude de l'espace BL^2 des signaux à spectre borné et théorème d'échantillonnage de Shannon

Hugo Martin

28 avril 2015

Référence : *Analyse harmonique réelle*, Willem, ou *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, El Amrani (mais c'est à mon sens moins clair)

1 Notations et définitions

Pour $u \in \mathcal{S}(R)$, on définit sa transformée de Fourier par $\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-2i\pi xy}\mathrm{d}x$. Par densité de $\mathcal{S}(R)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on étend cette définition à tout $L^2(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{I} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On définit alors

$$BL^2 := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \mathrm{supp}(\hat{u}) \subset \mathbb{I}\right\}.$$

On définit ensuite $\Omega = \mathbb{R}\backslash\mathbb{I}$.

On définit enfin le sinus-cardinal sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Résultats

Théorème

1. BL^2 est un espace de Hilbert.
2. Tout $u \in BL^2$ possède un représentant dans $C_0(\mathbb{R})$ (u est presque partout égale à une fonction de $C_0(\mathbb{R})$.
3. La suite $(\mathrm{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2.
4. Pour $u \in BL^2$, $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\mathrm{sinc}(x-k)$, et la convergence est uniforme et au sens de $L^2(\mathbb{R})$.

3 Démonstration

Démonstration du théorème : 1. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est une espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_2$, il suffit de montrer que BL^2 est une fermé de $L^2(\mathbb{R})$. Soient donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de BL^2 et u un élément de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $u_n \to u$. Par continuité de la transformée de Fourier, $\widehat{u_n} \to \hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, donc dans $L^2(\Omega)$. Or $\widehat{u_n}_{|\Omega} = 0$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(x) - \widehat{u_n}(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ainsi $\hat{u}_{|\Omega} = 0$, et donc $u \in BL^2$.

2. Soit $u \in BL^2$. Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{I}} |u| \leqslant \left(\int |u|^2\right)^{1/2} \left(\int 1^2\right)^{1/2} < +\infty$$

qui fait donc de $\hat{u}$ un élément de $L^1(\mathbb{I})$, donc de $L^1(\mathbb{R})$, puisque $\hat{u}_{|\Omega} = 0$. Par inversion de Fourier,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y)e^{2i\pi xy}\mathrm{d}y && \text{p.p.} \\ &= \int_{\mathbb{I}} \hat{u}(y)e^{2i\pi xy}\mathrm{d}y && \text{p.p.} \end{aligned}$$

Donc par théorème de continuité sous le signe intégrale et l'égalité ci-dessus, u a bien un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Notons au passage une inégalité intéressante qui nous servira par la suite. L'égalité précédente donne, combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition de BL^2 et l'égalité de Plancherel :

$$|u(x)| \leqslant \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{I})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On en déduit : $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

3. Posons $e_k(x) = e^{2ikx}\mathbb{1}_{\mathbb{I}}$. Un calcul simple montre que $\forall k \in \mathbb{Z}, \widehat{e_k} = \mathrm{sinc}(\cdot - k)$.
Soient $j, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}(x-j)\overline{\mathrm{sinc}(x-k)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{e_j}(x)\overline{\widehat{e_k}(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} e_j(x)\overline{e_k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{I}} e^{2i\pi(j-k)x}\mathrm{d}x \\ &= \delta_{j,k} \end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de BL^2.
Soit maintenant $u \in Vect\{(\mathrm{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}\}^{\perp}$, et montrons que u est la fonction nulle, ce qui donnera la densité de la famille dans BL^2. Alors pour tout entier k,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{sinc}(x-k)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\widehat{e_k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x)e_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(x)e_k(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (l'espace des fonctions 1-périodiques de carré intégrable), donc $\hat{u} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{I}$. Finalement, $u = 0$ par transformée de Fourier inverse.

4. Grâce à l'inégalité prouvée dans la deuxième partie, la convergence au sens de $L^2(\mathbb{R})$ entraine la convergence uniforme, or $(\mathrm{sinc}(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de BL^2, la convergence de la série $\sum u(k)\mathrm{sinc}(x-k)$ a bien lieu au sens de $L^2(\mathbb{R})$. ∎

Développement : résolution de l'équation de la chaleur (dans un anneau) par les séries de Fourier

Hugo Martin

25 avril 2015

Référence : *Oraux X-ENS, analyse 4*, FRANCINOU, GIANELLA, NICOLAS

Théorème

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et 2π-périodique par rapport à x solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) & = & u_0(x), \, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{-nt^2} e^{inx}$$

où les C_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

Démonstration : *Analyse :*

Si u est une solution du problème, pour tout $t > 0$, $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est de classe C^∞ et 2π-périodique, donc égale à sa série de Fourier. Donc

$$u_t(x) = u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

où $c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x$. De même, $\forall t > 0, x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ est de classe C^∞, obtenue ne dérivant formellement (terme à terme) la série de Fourier de u par rapport à x, donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) n^2 e^{inx}.$$

De même, $\forall t > 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ est de classe C^∞, donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c_n}(t) e^{inx},$$

où $\tilde{c_n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x$. Or, u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, donc intégrable en x sur $[0,2\pi]$. De plus, pour tout $t_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ fixés, $|u(t,x)| \leqslant \|u\|_{\infty,[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]\times[0,2\pi]}$, constante qui est intégrable sur le compact $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon] \times [0,2\pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$t \mapsto \int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x$, donc $\tilde{c_n}(t) = c_n'(t)$. Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n'(t)e^{inx}.$$

Comme u est solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, u vérifie

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}}(c_n'(t) + n^2 c_n(t))e^{inx} = 0.$$

A $t > 0$ fixé, cette série converge normalement, (série de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$). Donc l'inversion suivante est justifiée : $\forall n_0 \in \mathbb{Z}$, $\forall t > 0$ fixé,

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}}(c_n'(t) + n^2 c_n(t))e^{inx}e^{-in_0x}\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}(c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x}\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi(c_{n_0}'(t) + n_0^2 c_{n_0}(t)) = 0$$

Ainsi, $\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$. Reste à déterminer α_n. Pour cela, on va appliquer l'égalité de Plancherel à $u_0 - u$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}$ la décomposition en série de Fourier de u_0. Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n - \alpha_n e^{-n^2 t}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 \pi|u_0(x) - u(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t > 0$, on a :

$$|C_n - \alpha_n e^{-n^2 t}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_0(x) - u(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$

Or, par continuité de u et de u_0, d'une part

$$\begin{aligned} [0,1]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{R}_+ \\ (t,x) &\mapsto |u_0(x) - u(t,x)| \end{aligned}$$

est continue sur le compact $[0,1]\times[0,2\pi]$, donc majorée par une constante, qui est intégrable sur un domaine d'intégration borné, et d'autre part, $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\forall n \in \mathbb{Z}\alpha_n = C_n$.

Ainsi,

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-nt^2}e^{inx}.$$

Synthèse : Écrivons $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}$ la décomposition en série de Fourier de u_0. Soit alors

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-nt^2}e^{inx}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$|C_n e^{-nt^2}e^{inx}| \leqslant |C_n|,$$

qui est le terme général d'une série normalement convergente, donc u est bien définie et continue en chaque point, car $(t,x) \mapsto C_n e^{-nt^2}e^{inx}$ est continue. Dérivons formellement u :

$$\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(-n^2)^k(in)^l e^{-n^2t}e^{inx}.$$

Or, d'après l'égalité de Plancherel, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x =: K$, donc $\forall n \in \mathbb{Z}, |C_n|^2 \leqslant K$.

Soit $t_0 > 0$. Sur $]t_0, \mathbb{R}[$,

$$|C_n(-n^2)^k(in)^l e^{-n^2t}e^{inx}| \leqslant K|n|^{2k+l}e^{-n^2t} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc la série définissant u est normalement convergente. Ainsi, u admet des dérivées partielles par rapport à t et x à tout ordre, donc u est de classe C^∞ sur $]t_0, +\infty[$ pour tout $t_0 > 0$, ce qui montre que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Enfin, les dérivées partielles s'obtiennent en dérivant formellement, donc u est solution du système puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(-n^2)e^{-n^2t}e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et $u(0,x) = u_0(x)$. ■

Bonus : si u_0 est non bornée

Si u_0 est non bornée, il n'existe pas de solution non bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration : Supposons u_0 non bornée et u bornée sur $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{-n^2t}e^{inx},$$

et les $C_n e^{-n^2t}$ sont les coefficients de Fourier de $x \mapsto u(t,x)$. Alors,

$$\begin{aligned}|C_n e^{-n^2t}| &= |C_n|e^{-n^2t} \\ &\leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \|u\|_{L^2(0,2\pi)},\end{aligned}$$

qui donne, en faisant tendre t vers $-\infty$, la nullité des C_n pour tous les n non nuls. Ainsi, u_0 est constante. C'est absurde. ■