246

SERIES DE FOURIER. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

CADRE: On considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques que l'on confond avec les fonctions sur le tore $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

I) Étude des coefficients de Fourier

A) Premières définitions [GOU]

Déf: On définit les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ (pour

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$,
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$.

Notation: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) := e^{int}$.

Déf: On appelle série de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ comme la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ pour tout entier $n \geq 0$. (de fonctions)

Prop: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifient $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$. Du coup, on a $S_0(f) = \frac{1}{2}a_0(f)$ et $S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Cor.: Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est paire, alors les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls et si f est impaire, ce sont alors les $a_n(f)$ qui sont nuls.

Rem: On peut définir de façon analogue les coefficients de Fourier de fonctions T-périodiques $\forall T > 0$. (*)

B) Propriétés des coefficients de Fourier [O-A]

Prop: Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$ et $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$

(i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\check{f}(x) = f(-x)$.

(ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$;

(iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_a f(x) = f(x-a)$

(iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$ (v) $f * e_n = c_n(f)e_n$

(vi) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ → $f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)g(t)\,dt$

(vii) Si on suppose de plus que f est continue et de classe C^1 par morceaux, on a alors $c_n(f') = in\,c_n(f)$. ← (1)

Rem: Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on a alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$: $c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$

Prop (lemme de Riemann-Lebesgue): Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Prop: Si on note $c_0(\mathbb{Z}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \lim_{|n|\to+\infty} u_n = 0\}$, alors l'application γ définie pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme d'algèbres de $(L^1(\mathbb{T}), *, \|\cdot\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), \cdot, \|\cdot\|_\infty)$, qui est continu et de norme 1.

THM: Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Si la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} =: S$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{T})$ (en particulier si S converge uniformément vers f), alors S est la série de Fourier de f, c'est-à-dire que l'on a $c_n = c_n(f)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

II) Convergence des séries de Fourier

A) Les noyaux de sommations [O-A]

Déf: Si $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième noyau de Dirichlet par $\boxed{D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k}$.

Prop: Soit $n \geq 0$ un entier.

(i) D_n est une fonction paire, 2π-périodique et qui vérifie →

(*) Ex: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ par $f(x) := 1 - x^2/\pi^2$, on a alors $b_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0(f) = 4/3$ et $a_n(f) = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 1$. (iii) Si $x \in [-\pi;\pi]$, $D_n(x) = \frac{2\sin(nx)}{x} + r_n(x)$
avec $\sup_{|x|\le\pi,\, n\ge 0} |r_n(x)| < +\infty$

(ii) D_n est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \in \mathbb{R}$.

(iii) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a $S_n(f) = f * D_n$.

Déf: Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit le noyau de Fejér d'ordre m par $K_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} D_k$

Notation: Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_m(f) := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_k(f)$ la m-ième somme de Césaro de $(S_n(f))_n$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Prop: Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $K_n = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e_k$. $\sigma_n(f) = f * K_n$. On en déduit alors la réécriture suivante : $\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)c_k(f)e_k$.

Déf: On appelle approximation de l'unité ou identité approchée dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_j(t) \geq 0$

(2) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(t)\,dt = 1$

(3) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ $\lim_{j\to+\infty}\int_{\{|t|\geq\varepsilon\}} \varphi_j(t)\,dt = 0$.

Prop. La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ de noyaux de Fejér est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{T})$.

B) Un premier problème de divergence [GOU] [O-A]

THM (Banach-Steinhaus) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé et H une partie de $\mathcal{L}(E,F)$. Si pour tout $x \in E$, on a $\sup_{f\in H}\|f(x)\|_F < +\infty$, alors $\sup_{f\in H}\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

Cor: Il existe une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont la série de Fourier diverge en 0

C) Convergence ponctuelle et dans L^p [OA] [GOU]

THM (Fejér): (i) Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on a alors :

- $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$.

(ii) Si pour $p \in [1;+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a alors.

- $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout entier $n \geq 1$
- $\lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0$

APP: - Ce dernier théorème implique clairement la densité des polynômes trigonométriques dans les espaces $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ et $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1;+\infty[$.

- (thm de Weierstrass) : Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a;b]$. (2)

THM (Dirichlet). Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on suppose que $f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et que f possède des dérivées à gauche et à droite en x_0 (c'est-à-dire que $f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0^-}$ et $f'(x_0^+) = \lim \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0^+}$ existent), alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$. (3)

THM. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. (4)

D) [illegible] [O-A]

Prop: Muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ donné par : $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, l'espace $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert

Rem: Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$

__Prop:__ La famille $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $(L^2(\mathbb{T}), \langle , \rangle)$.

__Prop:__ Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \in L^2(\mathbb{T})$.
(i) $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n := \mathrm{Vect}(e_k : k \in [\![-n ; n]\!])$ (autrement dit, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, on a $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2$)
(ii) $\|S_n(f) - f\|_2 \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$
(iii) $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

__THM (Parseval):__ Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a l'égalité $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

III/ [illegible] de Fourier.

A) Régularité [illegible] [QUZU]

__Prop:__ Soit $k \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique
(i) Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors $\lim_{|n| \to +\infty} n^k c_n(f) = 0$
(ii) Si $k \geq 2$ et si $c_n(f) = O(|n|^{-k})$, alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}(\mathbb{T})$.
(iii) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire si et seulement si $\lim_{|n| \to +\infty} |n^k c_n(f)| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

B) Calcul de la somme d'une série [GOU2]

- Il est possible d'appliquer les théorèmes de convergence et d'évaluer le résultat obtenu en un point:

__Ex:__ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

- Il est également possible d'appliquer l'égalité de Parseval pour en déduire la valeur de la somme de certaines séries.

__Ex.__ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- Il est aussi possible de trouver la valeur de la somme d'une série de fonctions (autrement dit qui dépend d'un paramètre).

__Ex.__ Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$

C) Formule sommatoire de Poisson [GOU2]/[QZ]

__Déf:__ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable alors la transformée de Fourier de f est l'application $\hat{f}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$.

__THM (Formule sommatoire de Poisson):__ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ lorsque $|x| \to +\infty$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$. DVP

__APP__ Si a est un réel strictement positif, on a alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(a\pi)$.

__APP.__ Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a si $\delta_{\mathbb{Z}} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$, alors $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}}$.

__APP__ Pour tout $s > 0$, on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 / s}$

__Références__. [GOU2] → GOURDON - Analyse / [O-A] → Objectif Agreg / [QUZU] → Queffélec Zuily - Analyse pr l'Agreg.

Quelques oublis

(1) Ex: Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{2n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2(t)}\,dt$ et $c_{2n}(f) = 0$.

(2) APP: Si $c_n(f) = 0$ $\forall n$, on a $\sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n = 0$
Le thm de Féjer assurant que $\sigma_N(f) \to f$, on a donc $f = 0$ pp.

(3) Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire tq $\forall t \in [0;\pi]$, $f(t) := \sin^2 t$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \frac{-8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$. De plus, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-8}{\pi(2n+1)(2n-1)(2n+3)} \sin((2n+1)t)$

(4) APP: Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, f_α 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ tq $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ $\forall t \in]-\pi;\pi]$ Alors $\forall t \in [-\pi;\pi]$, on a $\cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha \pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nt)$.
D'où $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{1 \le n \le +\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$
On obtient $\forall t \in]-\pi;\pi[$, $\sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$