L246 : Séries de Fourier : Exemples et Applications

I _ Définitions et Premières propriétés

① _ Préambule

• on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodiques.

• $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

• on note c_0 l'ensemble des suites complexes de limite 0 en l'infini.

• on pose $e_n : t \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

prop : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$

Prop : $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthogonale de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

② _ Coefficients de Fourier

def : pour $f \in L^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on definit le n-ième coefficient de Fourier (exponentielle) par :

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt$$

• On pose $\gamma : L^1 \longrightarrow c_0$

$\quad f \mapsto (C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

Rem ~~exo~~ ~~montrer que~~ γ est ~~bien~~ à valeur dans c_0

def : pour $f \in L^1$ et $N \in \mathbb{N}$, on definit la N-ième somme partielle de Fourier de f : $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} C_n(f)$

• On note U l'ens. des fcts $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telles que $S_N(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

• On note $A \subset U$ celui des fct f ~~qui convergent~~ telles que $S_N(f)$ converge normalement vers f

Prop : U est un espace de Banach pour $\|f\|_U = \sup_{N\geq 0} \|S_N(f)\|_\infty$

• $A \subset U$ est une algèbre de Banach pour $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|$

propriétés (usuelles) : soit $f \in L^1$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $g \in L^\infty$.

• on note $\tilde{f}(t) = f(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $C_n(\tilde{f}) = C_{-n}(f)$

• $C_n(\bar{f}) = \overline{C_{-n}(f)}$

• $C_n(\tau_a f) = e^{ina} C_n(f)$

• $C_n(e_k f) = C_{n-k}(f)$

• $f * e_n = C_n(f)\, e_n$

• $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

• si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1 M$, $C_n(f') = in\, C_n(f)$

• si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$ converge unif vers f, alors $\begin{cases} f \in \mathcal{C}_{2\pi} \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ a_n = C_n(f) \end{cases}$

Lemme (de Riemann - Lebesgue) : soient $a < b$, $f \in L^1([a;b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

rem : on peut alors montrer que γ est un homomorphisme d'algèbre. En particulier, γ est toujours injective.

Thm : (Inégalité de Bessel) : soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi} M$. Dans ce cas on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 \leq \int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt$$

rem: (forme réelle des coefficients de Fourier)

$$\sum c_n(f)e_n = a_0(f) + \sum a_n(f)\cos(nt) + \sum b_n(f)\sin(nt)$$

avec:

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \end{cases} \quad n\in \cancel{\mathbb{Z}}\mathbb{N}$$

rem: $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$

③ - Dans l'espace Hilbertien L^2

γ réalise une bijection isométrique de $L^2\cap L^1 \to \ell^2$.

prop (Identité de Parseval): soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap L^2$. Alors: $\|(c_n(f))_n\|^2_{\ell^2} = \|f\|^2_{L^2}$

Thm (Riesz-Fischer): soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$.

$f \in L^2$ ssi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge dans L^2

II - Théorèmes de Convergences

rem: il existe des fonctions continue en 0 dont la série de Fourier diverge en ce point.

Thm: l'ensemble des fonctions continues dont la série de Fourier converge en 0 est negligeable devant l'ensemble des fonctions continues

① - Théorème de Dirichlet

def: (Noyau de Dirichlet) soit $N\in\mathbb{N}$. On appelle noyau de Dirichlet D_N la serie $D_N := \sum_{|n|\le N} e_n$

prop: $\forall N\in\mathbb{N}$, on a:

- D_N est pair, 2π-periodique et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$
- D_N prolonge sur $\mathbb{R}$ la fct $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$
- $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}\mathcal{M}$, on a: $S_N(f) = f * D_N$

Thm: soit $f\in\mathcal{C}^1_{2\pi}\mathcal{M}$. Alors la serie de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{N\to\infty} S_N(f) = \tilde{f}$ ~~Alors~~ où $\tilde{f}$ est la regularisée de f.

Corollaire: si f est de plus continue, alors:

$$S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{} f$$

Application: montrer que $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

② - Théorème de Fejér

def (noyau de Fejér K_N) pour $N\ge1$, $K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} D_k$

def (somme de Fejér σ_N) pour $N\ge1$ et $f\in L^1$:

$$\sigma_N(f) = \frac{S_0(f)+\dots+S_{N-1}(f)}{N}$$

prop:

- $K_N = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2 \ge 0$
- $\|K_N\|_1 = 1$
- soit $f\in L^1$, $\sigma_N(f) = f*K_N$

Thm (de Féjer) : soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Alors : ~~Alors~~

$$\begin{cases} \| \sigma_N(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty , \forall N \geq 1 \\ \lim_{N \to \infty} \| \sigma_N(f) - f \|_\infty = 0 \end{cases}$$

III - Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

Thm : soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une puissance $\alpha > 1$ et un réel $M > 0$ tel que :

$$|f(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$$

~~Alors~~ De plus, supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$

Rappel : $\hat{f}$ désigne la tranformée de Fourier de f (qui existe sous ces hypothèses) :

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{it\xi} dt$$

Conséquence : la fonction de Jacobi $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in^2\pi z}$ $\forall z \in H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ satisfait :

$$\theta(-1/z) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2} \theta(z)$$

(DEV)

2) Résolution d'une équation de la chaleur sur un fil

On cherche les solutions u satisfaisant :

$$(EC) \begin{cases} (1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{sur } D =]0;L[\times [0;\infty[\\ (2) \quad u \in \mathcal{C}^0(\bar{D}) \cap \mathcal{C}^2(D) \\ (3) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 , \forall t \in [0;\infty[\\ (4) \begin{cases} u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [0;L] \\ h \in \mathcal{C}^1([0;L]) \end{cases} \end{cases}$$

- Queffelec, Zuily, Analyse pour l'agregation
- Oraux X-ENS analyse 2, S. Francinou
- Adrien Laurent (ens-rennes) Equation Chaleur

Question dev

capeuprandom

Développement
Théorème de Fejér

19 septembre 2016

Définition 1. *Soient* $f \in L^1, N \geq 1$. *La* somme de Fejér d'indice N de f *est la fonction définie par :*

$$\sigma_N(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N}.$$

On veut démontrer le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit* $f \in \mathcal{C}$, *alors pour tout entier* $N \geq 1$ *on a* $||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ *et* $\lim\limits_{N \to \infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$.

Pour commencer, on a besoin de donner quelque propriétés et définitions.

Proposition 3. *Soient* $f \in L^1$ *et* $g \in L^\infty$. *Alors on a* $||f * g||_\infty \leq ||f||_1 ||g||_\infty$.

Proposition 4 (Propriétés du noyau de Dirichlet).

1. *Soit* $N \in \mathbb{N}$, *alors* $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$.
2. *Soient* $x \in]0, 2\pi[, N \in \mathbb{N}$. $D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})}$.
3. *Soient* $f \in L^1, N \in \mathbb{N}$. *Alors* $S_N(f) = f * D_N$.

Proposition 5 (Propriétés du noyau de Fejér). *Soit* $N \geq 1$ *un entier.*

1. $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \geq 0$.
2. $||K_N||_1 = 1$.
3. $0 < \delta \leq \pi \Rightarrow \lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x)dx = 0$.
4. *Si* $f \in L^1$, *alors pour tout* $N \geq 1$ *on a* $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Démonstration. 1. D'après les propriétés du noyau de Dirichlet, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
NK_N(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} &&= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} Im\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x}\right)\\
& &&= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} Im\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1}\right)\\
& &&= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} Im\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}}e^{iN\frac{x}{2}}[e^{iN\frac{x}{2}}-e^{-iN\frac{x}{2}}]}{e^{i\frac{x}{2}}[e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}]}\right)\\
& &&= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} Im\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}}e^{iN\frac{x}{2}}2i\sin(N\frac{x}{2})}{e^{i\frac{x}{2}}2i\sin(\frac{x}{2})}\right)\\
& &&= \frac{\sin(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} Im(e^{iN\frac{x}{2}})\\
& &&= \left(\frac{\sin(N\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.
\end{aligned}$$

2. Comme $K_N \geq 0$, alors

$$||K_N||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{N}\cdot N = 1$$

d'après les propriétés du noyau de Dirichlet.

3. Soit $\delta \in]0,\pi]$. Si $\delta < |x| \leq \pi$, alors on a $\sin^2(\frac{x}{2}) \geq \sin^2(\frac{\delta}{2})$.
Ainsi $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)dx \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}.$$

On en déduit le résultat.

4. Ceci découle encore une fois des propriétés du noyau de Dirichlet.
$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_N = f * \left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right)$,
ce qui implique que $\sigma_N(f) = f * K_N$.

□

Preuve du théorème

Définition 6. *Soit $f \in C$. On appelle* module de continuité de f *l'application qui à tout $\delta > 0$ associe le nombre* $\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u - v| \leq \delta\}$.

Soient $\delta \in]0,\pi]$ et $\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u - v| \leq \delta\}$ le module de continuité de f en δ.

$$\begin{aligned}
||\sigma_N(f) - f||_\infty &= ||f * K_N||_\infty\\
&\leq ||f||_\infty ||K_N||_1 = ||f||_\infty.
\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_N(f,x) &= f(x) - \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)-f(x-t)]K_N(t)dt \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x)-\sigma_N(f,x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} |f(x)-f(x-t)|K_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi} |f(x)-f(x-t)|K_N(t)dt \\ &\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} K_N(t)dt + 2||f||_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi} K_N(t)dt \\ &\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})} \\ &= \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}. \end{aligned}$$

Ainsi $||\sigma_N(f)-f||_\infty \le \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$. On passe à la lim sup :

$$\limsup_{N\to\infty} ||\sigma_N(f)-f||_\infty \le \omega(\delta).$$

Comme $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$, en utilisant la continuité uniforme de f on obtient :

$$\limsup_{N\to\infty} ||\sigma_N(f)-f||_\infty \le 0$$

i.e. $\lim\limits_{N\to\infty} ||\sigma_N(f)-f||_\infty = 0$.

Développement: formule sommatoire de Poisson

Version du 19 septembre 2016

On commence par rappeler la notion de transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in L^1$:

$$\hat{f}(x) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{itx}dt$$

L'objectif de ce développement est de démontrer la formule sommatoire de Poisson, puis d'en montrer une application intéressante au calcul d'une transformée de Fourier.

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une puissance $a > 1$ ainsi qu'un réel $M > 0$ tels que :*

$$|f(x)| \leq M(1+|x|)^{-a}.$$

On suppose également que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$$

Démonstration. On veut commencer par se ramener à l'étude d'une fonction intégrable périodique de période 2π. Une méthode simple consiste à poser pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Il est immédiat de vérifier que F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.
En effet, considérons un compact K de la forme $[-A; A]$, et un élément $x \in K$. Pour tout entier n tel que $|n| \geq 2A$, on a $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq |n|/2$ et :

$$|f(x+n)| \leq \frac{1}{(1+\frac{|n|}{2})^a}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Cette majoration est indépendante de x et a, ce qui montre que la série converge normalement.

On montre par un changement de variable ($p = n+1$) que F est périodique de période 1, et son coefficient de Fourier est :

$$c_n(F) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}dx = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx$$

La convergence étant normale sur $[0;1]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$c_n(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nk}e^{-2i\pi nu}dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu}du = \hat{f}(n).$$

La série de Fourier converge normalement sur tout $\mathbb{R}$ puisque $F \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(F)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. De plus F est égale à sa série de Fourier (conséquence de Fejér), on a alors :

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

et finalement il vient (en évaluant pour $x = 0$) le résultat souhaité :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$$

□

Maintenant, nous allons établir la formule suivante : Considérons l'ensemble $H = \{z_{\mathbb{C}}; Im(z) > 0\}$.

Application 1. *La fonction de Jacobi définie pour tout $z \in H := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ par $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$. On a l'égalité :*

$$\Theta(-\frac{1}{z}) = (\frac{z}{i})^{-1/2}\Theta(z)$$

Pour la démonstration, on introduit la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$ définie pour tout x réel. Sa transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ est :

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}.$$

De plus la fonction est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Définie ainsi, f vérifie les hypothèses de du théorème précédent, et l'identité des séries :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

la définition de f donne donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}e^{2i\pi nx}$$

posons $g(t,z) := f(t)^z = e^{-\pi z t^2}$ pour un nombre complexe $z \in H$. Si on fixe z dans H, la fonction $|g(t,z)|$ tend vers 0 à l'infini plus rapidement que t^N pour tout N entier strictement négatif (f est dans l'espace de Schwartz). On montre que les autres hypothèses du théorème sont vérifiées et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(t+n,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(t,z)e^{2i\pi nt}.$$

Notons que la transformée de Fourier est toujours effectuée par rapport à la variable t.

Enfin, il faut calculer

$$\hat{g}(u,z) = \int e^{-i\pi z t^2} e^{2i\pi ut} dt$$

Pour cela, supposons d'abord que $z = iy$. Par un changement de variable $t \to y^{-1/2}t$, on a :

$$\hat{g}(t,iy) = \int e^{-\pi u^2} e^{2i\pi t y^{-1/2} u} y^{-1/2} du$$

Ce qui donne à la transformée de Fourier de f évaluée en $ty^{-1/2}$:

$$g(t,iy) = y^{-1/2} e^{-\pi \frac{t^2}{y}}$$

En appliquant sur H le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, on sait que $\hat{g}(t,z)$ est holomorphe dans ce cas. En effectuant un prolongement analytique sur H, on montre que la fonction est holomorphe sur H tout entier. En effet, on a :

$$\hat{g}(t,z) = \frac{z}{i}^{-1/2} e^{-\pi n^2} e^{\pi \frac{t^2}{z}}$$

pour z un imaginaire pur.
On sait que $e^{-\pi n^2} e^{\pi \frac{t^2}{z}}$ est holomorphe pour z différent de 0, il faut donc trouver une fonction qui se réduise à $y^{-1/2}$ pour z imaginaire pur, qui sera donc un prolongement de notre fonction à $\mathbb{C}$. On vérifie ainsi que la fonction :

$$(\frac{z}{i})^{-1/2} = |z|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} arg(\frac{z}{i})}$$

avec $|arg(z/i)| < \pi$, c'est-à-dire $arg(z/i) = arg(z) - \frac{\pi}{2}$ et $0 < arg(z) < \pi$.
La formule sommatoire de Poisson nous donne finalement :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi z(t+n)^2} = (\frac{z}{i})^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi n^2/z + 2i\pi nt}.$$

Pour $t = 0$, on obtient l'égalité remarquable sur la fonction de Jacobi :

$$\Theta(-1/z) = (\frac{z}{i})^{-1/2}\Theta(z)$$