246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

Cadre : On considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, T-périodiques. Quitte à dilater on supposera $T = 2\pi$.

I - Séries trigonométriques et coefficients de Fourier.

a) Définitions

Def 1 : Un polynôme trigonométriques de degré $N \in \mathbb{N}$ est une fonction de la forme $P : x \to \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}$, $C_n \in \mathbb{C}$.

Rq : 2 Par linéarité $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
avec $a_n = C_n + C_{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $b_n = i(C_n - C_{-n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Def 3 : Une série trigonométrique est une série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$

Prop 4 : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |C_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |C_{-n}|$ (resp $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$) convergent, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}$ (resp $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$) converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme définit une fonction continue et 2π-périodique.

Def 5 : Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on appelle coefficients de Fourier de f les $C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$

La série de Fourier associée à f est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx}$. On note $S_N(f)$ la somme partielle.

b) Propriétés des coefficients de Fourier.

Prop 6 : . Si f est paire, $b_n = 0$ $\forall n \geq 1$
. Si f est impaire, $a_n = 0$ $\forall n \geq 0$

Prop 7 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- $C_n(\alpha f + \beta g) = \alpha C_n(f) + \beta C_n(g)$
- $C_n(\bar{f}) = \overline{C_{-n}(f)}$
- En notant $\tau_s f : t \to f(t+s)$ on a $C_n(\tau_s f) = e^{ins} C_n(f)$
- Si f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux $C_n(f') = in\, C_n(f)$
- $C_n(f * g) = C_n(f)\, C_n(g)$

Prop 8 : (Lemme de Riemann - Lebesgue)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\lim_{|n|\to+\infty} C_n(f) = 0$

c) Exemples

Ex 9 : (Fonction créneaux) Soit f la fonction impaire, 2π-périodique qui vaut $\frac{\pi}{2}$ sur $]0,\pi[$ et $f(0) = f(\pi) = 0$ alors
$a_n(f) = 0$, $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Ex 10 : (Fonction triangle) Soit g la fonction paire, 2π-périodique qui vaut $\frac{\pi}{2} - x$ sur $[0,\pi]$ alors
$a_{2n}(g) = 0$, $a_{2n+1}(g) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ et $b_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

II) Différents modes de convergences

a) Noyaux de Dirichlet et de Fejer.

<u>Def 11</u> : On appelle noyau de Dirichlet d'ordre n

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k \quad \text{où} \quad e_k(x) := e^{ikx}, \ k \in \mathbb{Z}$$

<u>Prop 12</u> : . D_n est pair et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$

. $D_n(x) = \dfrac{\sin((\frac{1}{2}+n)x)}{\sin(\frac{x}{2})}$, $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in L^1(\mathbb{T}), \ S_n(f) = f * D_n$

<u>Def 13</u> : On appelle noyau de Fejer d'ordre n

$$K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

<u>Prop 14</u> : . $K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\dfrac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$

. $\sigma_n(f) := \dfrac{S_0(f) + \dots + S_{n-1}(f)}{n} = f * K_n$

b) Convergence ponctuelle et uniforme

<u>Thm 15</u> : Si f est continue et si $\sum |c_n(f)| < +\infty$ alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f.

<u>Coro 16</u> : Si f est $\mathcal{C}^1$, la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

<u>Def 17</u> : Soit f une fonction continue par morceaux. On appelle régularisée de f la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ continue en } t \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h)+f(t-h)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Thm 18</u> : (Dirichlet) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction régularisée de f.
Si de plus f est continue, la convergence est normale.

<u>Rq 19</u> : Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge.

c) Convergence au sens de Césaro

<u>Thm 20</u> : (Fejer) Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ alors $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$.

. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $(1 \leq p < +\infty)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0$.

<u>Corollaire 21</u> : (Thm de Weierstrass) Toute fonction continue périodique sur un compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynôme trigonométrique.

<u>Corollaire 22</u> : $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$; $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = c_n(g)} \iff f = g$

d) Cadre Hilbertien $L^2(\mathbb{T})$

<u>Prop 23</u> : L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ est un espace de Hilbert.

Prop 24 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{T})$.

Rq 25 : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\langle f, e_n \rangle = c_n(f)$.

Prop 26 : Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N(f)$ est la projection orthogonale sur le sous-espace des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Thm 27 : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$; $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_2} f$ et on a (égalité de Parseval) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$

Cor 28 : $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie bijective. $L^2(\mathbb{T}) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.

III Applications

a) Calcul de sommes et de séries

App 29 : Pour f 2π-périodique telle que $f(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$ la formule de Parseval nous donne $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$, on en déduit $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

App 30 : La fonction f impaire, 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in]0, 2\pi[\\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admet le développement en série de Fourier : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$

Thm 31 : (Formule sommatoire de Poisson) $\boxed{\text{DEV 1}}$

. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que (i) $\exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

(ii) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$

alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)$

où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$ désigne sa transformée de Fourier

→ En définissant $\forall t > 0$, $\theta(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t m^2}$ (fonction θ de Jacobi)

on a $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

App 32 : $\forall a > 0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a)$

b) Résolution d'équations différentielles $\boxed{\text{DEV 2}}$

Thm 33 : (Résolution de l'équation de la chaleur sur une barre)

On pose $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$

on souhaite résoudre $\begin{cases} \text{(i) } u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \\ \text{(ii) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$ (iii) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (iv) $u(x,0) = h(x)$

avec $h \in \mathcal{C}^1([0,L])$.

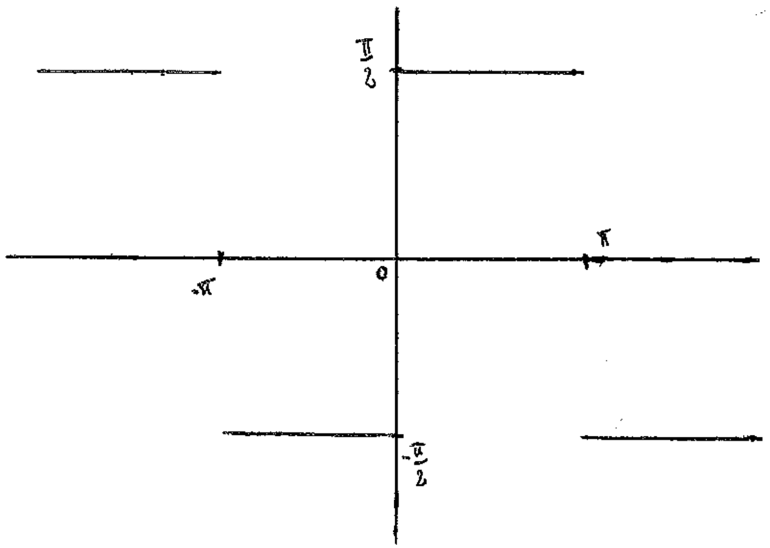
Ce système admet une unique solution, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.

App 34 : Une solution de $y'' + y = |\sin x|$ est de la forme $y = a\cos x + b \sin x + f(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$

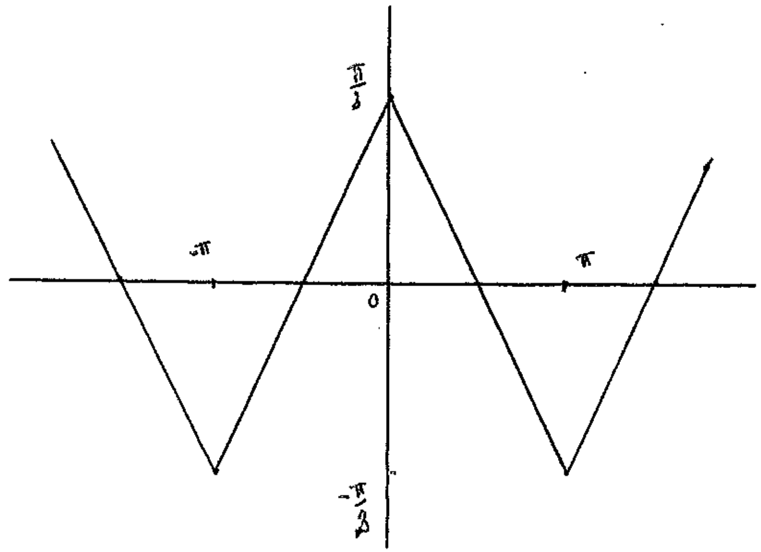
avec $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$

ANNEXE

Fonction créneaux : f impaire, $f_{|]0,\pi[} = \frac{\pi}{2}$:



Fonction triangle : f paire, $f_{|]0,\pi[} = \frac{\pi}{2} - x$:



Références :

- Gourdon, Analyse
- Zuily - Queffélec, Analyse pour l'agreg
- Beck, Malick, Peyré, Objectif Agreg

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Référence : ZUILY QUEFFÉLEC, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION : pp. 96-97

Définition. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier :* $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,\mathrm{d}t$

Théorème. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que :*

(i) $\exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \dfrac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty$

Alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)$$

Preuve. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)$.

Montrons que φ est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note : $f_n(x) = f(x+2n\pi)$.
Montrons que la série des f_n converge uniformément sur tout compact $[-A, A]$, avec $A > 0$, de $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in [-A, A], |f_n(x)| = |f(x+2n\pi)| \leq \frac{M}{(1+|x+2n\pi|)^\alpha}, \text{ par } (i)$$

Or, $\forall x \in [-A, A], \forall n \in \mathbb{Z}$:

$$|n\pi| \geq A \Rightarrow |x+2n\pi| \geq |2n\pi| - |x| \geq |2n\pi| - A \geq |n\pi|$$

Donc, sur le compact $[-A, A]$, on a :

$$\forall |n\pi| \geq A, \|f_n\|_\infty \leq \frac{M}{(1+|n\pi|)^\alpha}$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, comme $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{M}{(1+|n\pi|)^\alpha}$ est convergente. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$. Par le théorème de continuité sous le signe somme, on déduit que φ est bien définie et continue.
De plus, φ est 2π-périodique. Déterminons ses coefficients de Fourier. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a :

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-imt}dt$$

Comme la série de f_n converge normalement, on peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$:

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-imt}dt$$

Par le changement de variable $u = t + 2n\pi$, on obtient :

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)e^{-imu}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-imu}du = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(m)$$

Par (ii), on a donc : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_m(\varphi)| < +\infty$, ce qui signifie que la série de Fourier de φ converge normalement vers φ.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

En $x = 0$, on retrouve la formule voulue. □

Application (Fonction θ de Jacobi).

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \theta(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t m^2}$$

Pour tout $t > 0$, on a :

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Lemme. *Soit G la fonction suivante : $\forall u \in \mathbb{R}, G(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$. Alors :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi}G(\xi)$$

Preuve de l'application. Soit $a > 0$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-ax^2}$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(\sqrt{2a}x)^2}{2}} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable $u = \sqrt{2a}x$, on a :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2a}}u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2a}}\widehat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad \text{d'après le lemme.}$$

La formule de Poisson appliquée à f donne :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{4a}} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-4a\pi^2 m^2}$$

Pour tout $t > 0$, en prenant $a = \frac{t}{4\pi}$, on a : $\theta(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-4a\pi^2 m^2}$. D'où :

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{4a}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi m^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

□

Preuve du lemme. (S'il reste du temps) Par définition, on a : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

On pose : $\forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2, F(\xi, x) = e^{-i\xi x}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

F est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(\xi, x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x) = -ixe^{i\xi x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Donc, pour $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x)\right| = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$, et $x \mapsto |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, $\widehat{G}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on obtient par intégration par parties :

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{G}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\xi\widehat{G}(\xi)$$

C'est une EDO linéaire d'ordre 1, donc on a directement :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}(\xi) = \widehat{G}(0)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Comme $\widehat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$, on obtient le résultat voulu. □

EQUATION DE LA CHALEUR

Références :ZUILY QUEFFÉLEC, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION : pp. 106-108
EVANS, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS : p.63 (pour l'unicité)

On va résoudre l'équation de la chaleur sur $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$. On note $\overline{Q} = [0, L]\times[0, +\infty[$. Le problème à résoudre est le suivant :

$$(EC)\begin{cases} u \in \mathscr{C}^0(\overline{Q}), \text{ avec u} \in \mathscr{C}^2_1(Q) & (i) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ sur Q} & (ii) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[& (iii) \\ u(x,0) = h(x), \text{ pour tout } x \in [0, L] & (iv) \end{cases}$$

où h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, L]$ vérifiant $h(0) = h(L) = 0$ (par (iii)), et où $\mathscr{C}^2_1$ est l'espace des fonctions dérivables deux fois en espace et une fois en temps.

Théorème. *Le système (EC) admet une solution de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Q. C'est l'unique solution de ce système.*

Preuve. Analyse :(par séparation des variables)
On cherche une solution sous la forme : $u(x,t) = f(x)g(t)$. Dans ce cas, (ii) est équivalent à :$f(x)g'(t) - f''(x)g(t) = 0$, sur Q. Cherchons une solution qui ne s'annule pas sur Q. Ainsi :

$$\forall (x,t) \in Q, \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

Cette équation n'est satisfaite que si ces deux termes sont constants. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,t) \in Q, \begin{cases} f''(x) - \lambda f(x) = 0 \\ g'(t) - \lambda g(t) = 0 \end{cases}$$

Soit Δ le discrimimant de l'équation caractéristique de l'EDO satisfaite par f : $\Delta = 4\lambda$. On a donc trois cas à distinguer pour la forme de f.
• Si $\lambda > 0$: alors $f(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Les conditions aux bords (iii) nous donnent : $f(0) = C_1 + C_2 = 0$. Donc, $f(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) = 2C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}L)$, ce qui implique $C_1 = 0$. Ainsi, on a $f = 0$, donc $u = 0$, ce qui ne nous intéresse pas.
• Si $\lambda = 0$: alors $f(x) = C_1 x + C_2$. Par (iii), on obtient $C_1 = C_2 = 0$. On retombe encore sur $u = 0$.
• Si $\lambda < 0$: si on considère ξ une racine de $-\lambda$, on a $f(x) = A\cos\xi x + B\sin\xi x$.
Toujours grâce aux conditions au bords, on a $A = 0$ et $B\sin\xi L = 0$. Donc $\xi = \frac{n\pi}{L}$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, les fonctions $f_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ sont toutes solution de (1).
D'autre part, toujours en considérant que $-\lambda = \xi^2$, (2) étant une EDO linéaire de degré 1, les solutions sont de la forme $g_n(t) = C_n e^{-\xi^2 t} = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$. On a donc mis en évidence une famille de solutions de (ii) :

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, n \in \mathbb{Z}$$

Comme (ii) est linéaire, on va chercher une solution sous forme de combinaison linéaire de telles fonctions :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Synthèse : Soit h_1 la fonction définie sur $[-L, L]$ par :

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x), \text{ si } x \in [0, L] \\ -h(-x), \text{ si } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

h est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, L]$, donc h_1 est $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[-L, L]$. De plus h_1' est continue en 0 par construction, donc h_1 est $\mathscr{C}^1$.
Considérons H, la fonction $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$, qui coïncide avec h_1 sur $[-L, L]$. Etant donné que $h_1(L) = h_1(-L) = 0$, H est continue sur $\mathbb{R}$. Et comme h_1 est $\mathscr{C}^1$, on en déduit que H est $\mathscr{C}^1$ par morceaux $(*)$. Donc, par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de H converge normalement vers H sur $\mathbb{R}$. Comme h_1 est impaire sur $[-L, L]$, la fonction H est impaire sur $\mathbb{R}$. On peut donc exprimer sa série de Fourier explicitement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(H) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ où } b_n(H) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x$$

De plus, comme la série de Fourier de H converge normalement, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n(H)$ converge absolument. Donc, par le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction u définie plus tôt (cette fois, en prenant $b_n = b_n(H)$ de la série de Fourier de H), est continue sur $\overline{Q}$. $(**)$
Maintenant, on souhaite montrer que u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Q. Pour cela on va utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme. On va étudier le comportement de la série des dérivées partielles d'ordre k par rapport à t, sur tout compact $[\varepsilon, M]$ de $]0, +\infty[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, L[, \left|\frac{\partial^{(k)} u_n}{\partial t^k}(x,t)\right| \leq \left|C_k b_n n^{2k} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right|$$

Donc,

$$\forall x \in]0, L[, \left\|\frac{\partial^{(k)} u_n}{\partial t^k}(x,.)\right\|_\infty \leq \left|C_k b_n n^{2k} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varepsilon}\right| =: \alpha_n |b_n|$$

où $\alpha_n |b_n|$ est le terme général d'une série convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0, \text{ donc } \exists N \geq 0, \exists c > 0, \forall n \geq N, \ \alpha_n|b_n| \leq C|b_n| \text{ avec } \sum_{n\geq 1} |b_n| < +\infty$$

Il y a donc convergence uniforme des séries des dérivées partielles sur tout compact de Q.
Ainsi, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, et déduire que u est $\mathscr{C}^1$ sur Q. Et on peut dériver terme à terme, à tout ordre, par rapport à chacune des deux variables. Les u_n étant $\mathscr{C}^\infty$, on peut réitérer ce procéder autant de fois que l'on veut. Donc u est $\mathscr{C}^\infty$ sur Q.
Il reste à s'assurer que u vérifie bien toutes les conditions du problème (EC) :

- On a bien montré que $u \in \mathscr{C}^0(\overline{Q})$ (cf.$(**)$).
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n vérifie bien (ii). Donc par dérivation sous le signe somme, u aussi.
- $u(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(0) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = u(L,t) = 0$.
- $u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = H(x)$, où H est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, L]$ (cf.$(*)$), et vérifie bien $H(0) = H(L) = 0$.

Unicité : (S'il reste du temps) Soient u_1 et u_2, deux solutions de (EC). On pose : $w = u_1 - u_2$. Par linéarité, w est solution de (EC).
On pose : $\forall t \in [0, +\infty[, e(t) = \int_0^L w^2(x,t)\,\mathrm{d}x$.
En utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, sur un compact quelconque de $[0, +\infty[$, on a :

$$e'(t) = \int_0^L 2w\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^L w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x, \text{ par } (ii)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$e'(t) = 2\left(\left[w\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) = -2\int_0^L \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x \leq 0$$

Donc e est décroissante sur tout compact de $[0, +\infty[$. D'où : $\forall t \in [0, +\infty[, e(t) \leq e(0) = 0$ (d'après les conditions aux bords). Or, e est positive. Donc $e = 0$, ce qui signifie que $w = 0$.
On a bien l'unicité.

$\square$