Cadre : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $\quad \int_{\mathbb{T}} f\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

I Coefficients de Fourier

Déf 1 : Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit les coefficients de Fourier de f par $c_n(f) = \int_{\mathbb{T}} f e^{-int}\,dt$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Remarque 2 : On considère parfois les coefficients
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ $\quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.
pour $n \in \mathbb{N}$. Et on a les relations $a_n = c_n + c_{-n}$
et $b_n = -i(c_n - c_{-n})$

Exemple 3 : • $c_n(e^{i\ell t}) = \delta_{\ell,t}$.
• Pour la fonction signal $\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ $c_n(\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}) = \begin{cases} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\pi} & n \neq 0 \\ \frac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n \end{cases}$
• Pour la fonction f tq $f_{|]-\pi,\pi[} = |x|$ on a $c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \neq 0 \\ \frac{-2}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Prop 4 : Pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ et $a, \ell \in \mathbb{Z}$
① $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ où $\tau_a f : t \mapsto f(t-a)$
② $c_n(e^{i\ell t} f) = c_{n-\ell}(f)$
③ $c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g)$
④ Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique $c_n(f') = in\, c_n(f)$

Prop 5 : Lien régularité décroissance
1 _ Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ $c_n(f) = o(1)$
2 _ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$ $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3 _ Soit f k-fois dérivable $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$
4 _ Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$

Déf 6 : Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, on appelle série de Fourier de f, la série $\sum c_n(f) e^{int}$ caractérisée par les sommes partielles $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}$

Remarque 7 : La série de Fourier d'une fonction peut ne pas converger.

Remarque 8 : Si $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, la prop 5 apporte que la série de Fourier de f converge normalement et donc définie une fonction continue.

Exemple 9 : Pour f définie par $f_{|]-\pi,\pi[} = |x|$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}$ et la série de f est donnée par $\frac{\pi}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{-4\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2\pi}$

II Noyaux trigonométriques principaux

Déf 10 : On définit le noyau de Dirichlet par
$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})t]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Remarque 11 : $\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,dt = 1$

Remarque 12 : Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, $D_N * f$ coïncide avec la somme partielle de la série de Fourier de f.

Thm 13 De convergence de Dirichlet

• Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. Si f admet en x une limite à gauche $f(x^-)$ et une limite à droite $f(x^+)$ et que les applications $t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}$ sont bornées lorsque $t \underset{t>0}{\to} 0$ alors $(D_N * f)(x) \to \frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$

• Soit $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{pm}$ alors $\|D_N * f - f\|_\infty \to 0$

Contre-Exemple 14: Si la fonction f n'est pas continue en x (mais $\mathcal{C}^1_{pm}$) alors la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f sur des intervalles $]x-\varepsilon; x[$: c'est le phénomène de Gibbs. Il est illustrer par la fonction créneau $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in [-\pi,0[\\ 1 \text{ sur } [0,\pi] \end{cases}$

Contre-Exemple 15: Il est possible de montrer qu'il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

Application 16. En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f_{|]-\pi,\pi[} = |\cdot|$, on peut trouver $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Application 17: Résolution de l'équation de la chaleur.

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles suivante:

• $\partial_t u - \partial^2_{x,x} u = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times]0,L[$

• $u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0$

• $u(0,x) = h(x) \quad \forall x \in [0,L]$

où $L > 0$ et h est une fonction continue sur $[0,L]$, dérivable sur $]0,L[$, donnée.

Proposition 18: Le problème de l'équation de la chaleur admet une solution u.

Def 19: On définit le noyau de Fejer par

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin(Nt/2)^2}{N\sin(t/2)^2}$$

Thm 20: Le noyau de Fejer est une approximation de l'unité.

Rem 21: $K_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n * f$ correspond à la moyenne de Cesaro des sommes partielles de la série de Fourier de f.

Thm 22: de convergence de Fejer

• Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C})$ alors $\|f - K_N * f\|_\infty \to 0$

• Soit $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a $\|f - K_N * f\|_p \to 0$.

DEV

Cor 23: Thm de Weierstraß

Les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues 2π-périodiques pour la norme uniforme.

Cor 24: L'application $\mathcal{F}: \begin{array}{l} L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$

est injective (on peut montrer qu'elle n'est pas surjective).

Cor 25: Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C})$ telle que sa série de Fourier converge simplement alors la somme de sa série de Fourier coïncide avec f.

Def 26. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; on appelle sa transformée de Fourier la fonction $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi t} f(t)\,dt$

Appli 27 : Formule sommatoire de Poisson.
Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tq il existe $\alpha > 1$ tel que

$F(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2i\pi nx}$

Cor 28 : La famille $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier pour $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ on a

- $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ (Bessel-Parseval)
- $\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) c_n(g)$

et l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|.\|_2)$
$f \mapsto c_n(f)$

est une isométrie linéaire bijective.

Appli 29 : En appliquant Bessel-Parseval à la fonction 2π-périodique définie par $f_{|]-\pi,\pi]} = |.|$ on peut trouver $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Appli 30 : Inégalité de Wirtinger
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b)$ alors $\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 dt$
avec égalité ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(t) = \alpha \cos\left(\frac{2\pi}{(b-a)} t\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{b-a} t\right)$$

Application 31 : Inégalité isopérimétrique :
Soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ une courbe plane fermée sans points doubles de longueur L, délimitant une surface S. Alors : $L^2 \geq 4\pi S$ avec égalité ssi γ est un cercle parcouru une seule fois.