246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

On note $L^1(0,2\pi)$ l'ensemble des extensions 2π-périodiques à $\mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur $(0,2\pi)$. On munit ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel de la norme $\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$, $f \in L^1(0,2\pi)$

I Série de Fourier d'une fonction intégrable

1) Coefficients de Fourier

Def 1 Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{inx} \end{vmatrix} \in L^1(0,2\pi)$

On appelle espace des polynômes trigonométriques l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Def 2 Pour $f \in L^1(0,2\pi)$, on appelle coefficients de Fourier (complexes) de f les quantités $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, $n\in\mathbb{Z}$.
On appelle série de Fourier (SF) de f la série :
$c_0(f) + \sum_{n\geq 1} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}$, aussi notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$

Rq 3 Comme f est intégrable et e_n de module 1, $c_n(f)$ est bien défini.

Ex 4 La SF est exacte sur les polynômes trigonométriques.

Def 5 On définit aussi les coefficients de Fourier réels de f par
$$\begin{cases} a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \end{cases} \quad n\in\mathbb{Z}$$

La SF associée devient $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(n\,\cdot) + b_n(f)\sin(n\,\cdot)$.

Prop 6 On a pour $f\in L^1(0,2\pi)$ et $n\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$

2) Règles de calculs

Prop 7 Si f est paire (resp. impaire), alors $b_n(f)$ (resp. $a_n(f)$) est nul pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Prop 8 (i) On note $\tau_a : \begin{vmatrix} L^1(0,2\pi) \to L^1(0,2\pi) \\ f \mapsto f(\cdot - a) \end{vmatrix}$ l'opérateur de translation par $a\in\mathbb{R}$.
Alors pour $f\in L^1(0,2\pi)$, on a $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$, $n\in\mathbb{Z}$.
(ii) Pour $f\in L^1(0,2\pi)$ $c_n(t\mapsto e^{ikt}f(t)) = c_{n-k}(f)$, $n,k\in\mathbb{Z}$.
(iii) On définit le produit de convolution de f et g par
$$f*g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt \end{array}$$
Alors pour f et g dans $L^1(0,2\pi)$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$
(iv) Si $f\in C^1([0,\pi])$, on a $f'\in L^1(0,2\pi)$ et $c_n(f') = in\,c_n(f)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ex 9 ∗) Soit $\varepsilon>0$. On appelle fonction signal $\sigma_\varepsilon := \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. Alors $c_n(\sigma_\varepsilon) = \frac{\sin(n\varepsilon)}{\pi n}$ si $n\in\mathbb{Z}^*$ et $c_0(\sigma_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi}$.
∗) On appelle fonction triangle $\Delta_\varepsilon = \left(x\mapsto\left(1-\frac{|x|}{\varepsilon}\right)_+\right)$.
Comme $\Delta_{2\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon}\sigma_\varepsilon * \sigma_\varepsilon$, on a $c_n(\Delta_{2\varepsilon}) = \frac{\sin^2(n\varepsilon)}{\pi\varepsilon n^2}$ si $n\in\mathbb{Z}^*$ et $c_0(\Delta_{2\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{\pi}$.

3) Décroissance et régularité

Prop 10 (lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f\in L^1(0,2\pi)$, alors $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.

Coro 11 (i) Si f est 2π-périodique continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(f) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
(ii) Si f est de classe C^k pour $k\geq 0$, alors $c_n(f) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Rq 12 Réciproque partielle : si $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n$ est telle que $x_n \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$ pour $k\geq 0$, alors $f\in C^k([0,2\pi])$

<u>Ex 13</u> L'ex 9 illustre ce lien entre décroissance et régularité : Δ_ε est plus régulier que σ_ε et ses coefficients décroissent plus vite.

4) Noyaux de Dirichlet et de Fejér.

Def 14 On définit les N-ième noyaux de Dirichlet et de Fejér, pour $N \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{cases} D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \\ K_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>Rq 15</u> Les sommes partielles de la SF de f sont donc données par $S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n = D_N * f$. On définit aussi leurs moyennes de Cesàro $\sigma_N(f) := K_N * f$.

<u>Prop 16</u> On a pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{cases} D_N(x) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ K_N(x) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{N\sin^2(x/2)} \end{cases}$$
et $\begin{cases} D_N(0) = 2N+1 \\ K_N(0) = N \end{cases}$

II Convergence des séries de Fourier

1) Convergence dans $L^1(0,2\pi)$

<u>Def 17</u> Si elles existent, on notera $f(x_+)$ et $f(x_-)$ les limites à droite et à gauche de f en x, et $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$ (appelée régularisée de f).

<u>Def 18</u> On appelle transformée de Fourier (TF) (discrète) l'application
$$\mathcal{F} : L^1(0,2\pi) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$
où $c_0(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites complexes tendant vers 0, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Th 19</u> (Fejér - Convergence L^p) Pour $p \in [1,\infty[$, si $f \in L^p(0,2\pi)$, alors $\sigma_N(f)$ converge vers f en norme L^p.

<u>Coro 20</u> $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue injective de norme inférieure à 1.

<u>C-ex 21</u> Elle n'est pas surjective : on peut montrer que si $f \in L^1(0,2\pi)$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{c_n(f)}{n}$ converge. Ainsi, comme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)} = +\infty$, il n'existe pas de fonction intégrable dont la SF vaut $\left(\frac{1}{\ln(n)} \mathbb{1}_{\{|n|\geq 2\}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2) Convergence dans $C^0([0,2\pi])$

On munit l'espace $C^0([0,2\pi])$ des fonctions continues 2π-périodiques de la norme du sup $\|\cdot\|_\infty$. On fait de même avec l'espace $C^0_{pm}([0,2\pi])$ des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.

<u>Th 22</u> (Fejér - Convergence uniforme) Si $f \in C^0([0,2\pi])$, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

<u>Coro 23</u> Si f est continue 2π-périodique et si sa SF converge simplement, alors sa somme coïncide avec f sur $\mathbb{R}$.

<u>Th 24</u> (Dirichlet) (i) Si $f \in L^1(0,2\pi)$ admet des limites $f(x_+)$ et $f(x_-)$, et si $t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$ sont bornées en 0^+, alors $S_N(f)(x)$ converge vers $\tilde{f}(x)$.

(ii) Si $f \in C^0 \cap C^1_{pm}([0,2\pi])$, sa SF converge uniformément vers f :
$$\|S_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

<u>App 25</u> (Formule sommatoire de Poisson) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (non périodique) alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{-2\pi n} f$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et on a
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f : $\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\,dx$.

App 26 La distribution tempérée $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est sa propre transformée de Fourier.

App 27 (Équation de la chaleur sur un anneau) Le problème aux dérivées partielles $\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ où $u_0 \in C^1([0,\pi])$ est la donnée et u l'inconnue, vérifiant

(i) les dérivées $\partial_t u, \partial_x u$ et $\partial^2_{xx} u$ existent et sont continues

(ii) $u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

admet une unique solution continue sur $[0,\pi]$.

DEV 1

3) Sommation d'Abel pour les séries de Fourier

Prop 28 Soit $f \in C^0_{pm}(\mathbb{R}[0,2\pi])$. Pour tout $r \in (0,1)$, la série

$$c_0(f) + \sum_{n\geq 1} \left(c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n}\right) r^n$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$, vers une fonction notée f_r. De plus

(i) f_r converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$, quand r tend vers 1^-

(ii) Si f est continue, f_r converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Rq 29 C'est une façon d'approcher f à partir de sa SF, alors que celle-ci ne converge pas forcément. D'ailleurs, le théorème de Banach-Steinhaus permet de montrer qu'il existe un G_δ dense de $C^0([0,2\pi])$ sur lequel la SF ne converge même pas simplement.

4) Analyse hilbertienne sur $L^2(0,2\pi)$

On note $L^2(0,2\pi) \subset L^1(0,2\pi)$ l'ensemble des extension 2π-périodiques à $\mathbb{R}$ des fonctions de carré intégrable sur $[0,2\pi]$. On le munit du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad , f,g\in L^2(0,2\pi),$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

Prop 32 Les polynômes trigonométriques $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(0,2\pi)$, qui est donc un Hilbert séparable.

Coro 33 (Parseval) La transformée de Fourier discrète

$$\mathcal{F} : L^2(0,2\pi) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est bien définie, et c'est une isométrie bijective. En particulier, on a pour $f \in L^2(0,2\pi)$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

App 34 On peut calculer les quantités suivantes :

$$\zeta(2) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ , \ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \ , \ \zeta(4) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

App 35 (Inégalités isopérimétriques) Soient a et b deux réels, $a<b$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par f sur $[a,b]$ telle que

(i) $f(a) = f(b)$

(ii) $f_{|[a,b)}$ est injective

(iii) f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et f' ne s'annule pas

On note A l'unique composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{C}$. Alors, si L est la longueur de la courbe $\mathcal{C}$, on a :

(i) $L^2 \geq 4\pi\lambda(A)$

(ii) $L^2 = 4\pi\lambda(A)$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est un cercle.

DEV 2