246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

I- Coefficients et séries de Fourier

A) définitions préliminaires

prop/ **def 1**: • on note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique.
$(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace vectoriel de $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ et est une algèbre de Banach.

• on note c_0 l'ensemble des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexes telles que $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$. $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

• pour $1\leq p\leq+\infty$, on note $L^p_{2\pi}$ l'e-v des classes des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques et Lebesgue-mesurables telles que $\|f\|_p<+\infty$.

prop/ **def 2**: Si $n\in\mathbb{Z}$, on désigne la fonction $t\mapsto e^{int}$, $e_n\in C_{2\pi}$.

def 3: (P) désigne le sev de $C_{2\pi}$ engendré par les e_n: un élément de P est une somme finie $\sum a_n e_n$ (où $a_n\in\mathbb{C}$) et s'appelle un polynôme trigonométrique.

B) coefficients et séries de Fourier

def 4: Si $f\in L^1_{2\pi}$ et $n\in\mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par:
$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\,dt.$$

ex 5: $c_n(e^{int})=1 \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

ex 6: $c_n(\mathbb{1}_{]-a,a[}(t))=\begin{cases}\frac{\sin(na)}{n\pi} & \text{si } n\neq0\\ \frac{a}{\pi} & \text{si } n=0\end{cases}$ pour $0<a<\pi$

def. 7: on définit la somme partielle d'indice $N\geq0$
$S_N(f)=\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$, $S_N(f,x)=\sum_{-N}^{N}c_n(f)e^{inx}$

def. 8: on appelle série trigonométrique toute somme de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{inx}$ $(\alpha_n\in\mathbb{C})$

def 9: Soit $f\in L^1_{2\pi}$, on appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(f)e_n$ où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

Rem 10: $\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{inx}$ peut se réécrire en $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ où $a_0=2\alpha_0$, $a_n=\alpha_n+\alpha_{-n}$ et $b_n=i(\alpha_n-\alpha_{-n})$ pour $n\geq1$.

def. 11: Lorsque les α_n de $\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{inx}$ sont les coef. de Fourier $c_n(f)$ d'un élément f de $C_{2\pi}$, alors les coef a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier réels (ou trigonométriques) de f, notés $a_n(f)$ et $(b_n(f)$ et donnés par, $\forall n\in\mathbb{N}$.
$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$

Rem 12: $c_n(f)=\frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$

Prop 13: * Si f est paire, $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n(f)=0$

* Si f est impaire, $a_n(f)=0$ et $b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$

ex. 14: les coefs de Fourier réels de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique donnée $\forall x\in[-\pi,\pi]$, par: $f(x)=1-\frac{x^2}{\pi^2}$ sont: $a_n(f)=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}$ et $b_n(f)=0$

ex. 15: le développement en série de Fourier de $x\mapsto\frac{1}{2+\cos x}$ est $\frac{2}{\sqrt3}\left[\frac12+\sum_{n=1}^{+\infty}(-2+\sqrt3)^n\cos nx\right]$

C) 1ères propriétés des coefficients de Fourier.

def. 16: Soit $f,g\in L^1_{2\pi}$ $(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x-t)f(t)\,dt$ est appelé produit de convolution de f et g en $x\in[0,2\pi]$.

Prop. 17: Soit $f\in L^p_{2\pi}$ $(1\leq p<+\infty)$ alors on définit $\tau_a(f)=f(t+a)$ et $\lim_{a\to0}\|\tau_a f-f\|_p=0$.

Prop. 18: Soit $f\in L^1_{2\pi}$, $a\in\mathbb{R}$, $k,n\in\mathbb{Z}$, alors:

i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f}(t) = f(-t)$

ii) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ iii) $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$

iv) $c_n(e_k \cdot f) = c_{n-k}(f)$ v) $f * e_n = c_n(f) e_n$

vi) si, de plus, $f \in C_{2\pi}$ et C^1 par morceaux
$c_n(f') = in\, c_n(f)$

vii) si $\sum_{-N}^{N} \alpha_n e_n$ converge uniformément vers f alors $f \in C_{2\pi}$ et $\alpha_n = c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Prop 19: (Lemme de Riemann-Lebesgue) soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ et soit $f \in L^1_{2\pi}([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t}\, dt = \lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos \lambda t = \lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin\lambda t\, dt = 0.$$

Prop 20: Soit $\gamma : f \mapsto \gamma(f) := (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $f \in L^1_{2\pi}$. γ est un morphisme d'algèbre de norme 1 de $L^1_{2\pi}$ dans c_0.

Coro 21: pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Rem 22: Toute série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque est fausse : $\sum_{n\geq 1} \cos nx$ n'est pas une S.F car ses coef de Fourier ne tendent pas vers 0.

II- Convergences des séries de Fourier

A) Première difficulté

def. 23: la fonction $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$ ($N \in \mathbb{N}^*$) est appelé le noyau de Dirichlet d'ordre N

Prop 24: (1) D_N est paire, 2π périodique et vérifie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1$

(2) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$

(3) $\forall f \in L^1_{2\pi}$, on a $S_N(f) = f * D_N$.

DVPT 1

Th. 25 (Banach-Steinhaus) Soit E un espace de Banach, F un evn, on note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ev des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$, alors soit $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné, soit $\exists x \in E$ tq $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Th. 26: (contre-exemple de du Bois-Reymond) il existe $f \in C_{2\pi}$ telle que $\sup_{N\geq 1} |S_N(f)| = +\infty$. En particulier, la suite des $S_N(f)$ diverge en 0.

B) Solution de Féjer

def. 27: pour $f \in C_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ la $N^{\text{ième}}$ somme de Césaro de la SF de f ($N \geq 1$).

def. 28: la fonction $K_N := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j$ ($N \geq 1$) est appelé le noyau de Féjer d'ordre N.

Prop. 29: (1) $K_N = \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$, $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin x/2}\right)^2$

(2) $\|K_N\|_1 = 1$

(3) $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $\forall N \geq 1$ $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$

Th. 30 (convergence de Féjer) (1) si $f \in C_{2\pi}$, alors
a- $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall N \geq 1$
b- $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.

(2) si $f \in L^p_{2\pi}$ pour $p \in [1,+\infty[$, alors
a- $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ $\forall N \geq 1$
b- $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

Appli 31: (1) $(\mathcal{P})$ est dense dans $C_{2\pi}$

(2) soit $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$ alors $l = f(x_0)$

(3) soit $f \in C_{2\pi}$ telle que $S_N(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n$ ie f est développable en SF.

(4) soient $f, g \in C_{2\pi}$, alors $(\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)) \iff f = g$
soient $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $(\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)) \iff f = g$ p.p.

(5) (Th. de Weierstrass) Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes algébriques.

Rem. 32 : (4) montre que $\gamma : L^2_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ est injectif.

appli 33 : (fonction triangle) soit $\varepsilon \in]0,\pi[$ et soit $\Delta_\varepsilon : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon < |t| \leq \pi \end{cases}$ alors $\Delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n\varepsilon}{n^2\pi\varepsilon}\cos(nt)$.

appli 34 : $|\cos t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cos(2kt)}{4k^2-1}$

c) Solution de Dirichlet

Th. 35 : (de Dirichlet) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, mesurable, intégrable sur $[0,2\pi]$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que :

a) $\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t) =: f^+$ et $\lim_{t\to 0^-} f(x_0+t) =: f^-$ existent.

b) $\exists \delta > 0$ $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f^+|}{t}dt < +\infty$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f^-|}{t}dt < +\infty$

alors on a $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

Rem. 36 : la condition b) peut être remplacée par b') $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t) - f^+}{t}$ et $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f^-}{t}$ existent

Appli 37 : (Étude de la fonction signal) : $\varepsilon \in]0,\pi[$ $\sigma_\varepsilon(t) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon < |t| < \pi \end{cases}$. Si $0 < a < 2\pi$, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$

III - le cas particulier de $L^2_{2\pi}$

prop. 38 : $L^2_{2\pi}$ muni du pdt scalaire $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert.

prop. 39 : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Rem. 40 : Dans $(L^2_{2\pi}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $S_N(f)$ est la projection de f sur $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in[-N,N]})$

prop. 41 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$. En particulier, on a l'égalité de Parseval : $\forall f \in L^2_{2\pi}$ $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ et $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

Rem. 42 : en terme de coef de Fourier réels, la formule de Parseval s'écrit $\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$.

prop. 43 : L'appli $\mathcal{F} : L^2_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie bijective.

Appli 44 : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

prop. 45 : Soit $f \in C_{2\pi}$, f C^1 par morceaux, alors $S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

Rem. 46 : on n'a pas besoin du th de Dirichlet pour montrer la prop 45.

IV - De l'utilisation des coef et séries de Fourier

A) Comparaison entre le comportement d'une fonction et celui de ses coef. de Fourier

Th. 47 : (décroissance des coef de Fourier) Soit $f \in C^p_{2\pi}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ quand $|n| \to +\infty$.

prop. 48 : Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $k \geq 2$ un entier. Si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ quand $|n| \to +\infty$ alors f est de classe C^{k-2}.

prop. 49 : $f \in C^\infty_{2\pi} \iff (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \{(a_n),\ \lim_{|n|\to+\infty} |n^k a_n| = 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*\}$

prop. 50 : $f \in C_{2\pi}$ et $(\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) \geq 0) \to (S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ cv normalement sur $\mathbb{R}$ ssi $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$.

B) Formule sommatoire de Poisson.

déf. 51 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}f(t)dt$.

Th. 52 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ tq $\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f(x)| < +\infty$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f'(x)| < +\infty$ alors f vérifie la formule sommatoire de Poisson : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$.

Rem. 53 : on utilise souvent cette formule en $x=0$: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$.

C) Équations aux dérivées partielles

On considère une tige rectiligne de longueur π. Connaissant, à l'instant initial $t=0$, la température en chaque point x de la barre $[0,\pi]$ et à tout instant la température aux 2 extrémités, peut-on déterminer en tout pnt à tout moment la température de la barre $u(x,t)$?

On considère alors le problème suivant : Pour $Q =]0,\pi[\times]0,+\infty[$, $\overline{Q} = [0,\pi]\times[0,+\infty[$, trouver u telle que :

(1) $u \in C^0(\overline{Q})$, $u \in C^2(Q)$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans Q

(3) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $\quad t \in [0,+\infty[$

(4) $u(x,0) = h(x)$ $\quad x \in [0,\pi]$ où h est C^1 sur $[0,\pi]$ tq $h(0) = h(\pi) = 0$

Th. 54 : le problème admet une solution unique $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$ donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)e^{-n^2t}$$

Références : · Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation
· Gourdon, Analyse · El Amrani, Analyse de Fourier dans les esp. de fonct.
· Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation

OVPT 2