Leçon 247 : Exemples de problèmes d'interversion de limites

I. Régularité des suites et séries de fonctions :

1. Limite et continuité :

187 **prop 1** : Soit X un espace topologique, E un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E convergeant uniformément vers la fonction f.
Si chacune des fonctions f_n est continue au point $a \in X$, (resp. sur X), la fonction f est continue au point a (resp. sur X).

[H] 231 **c/ex 2** : $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ sont continues mais leur limite simple est discontinue.

[ZQ] **Lemme 3** : de Baire
Soit (f_k) une suite de fonctions continues d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers f.
Alors f est continue sur un ensemble gras (et donc dense)

[POM] 189 **cor 4** : Soit $\sum u_n$ une série uniformément convergente de fonctions de l'espace topologique X vers l'espace vectoriel normé E.
Si les fonctions u_n sont continues au point $a \in X$ (resp. sur X), la somme de $\sum u_n$ est continue en a (resp sur X).

[H] p257 **c/ex 5** : $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)x^n$. La somme est discontinue alors que les f_n sont continues.

[NOU] p73 **prop 6** : Soient X un espace topologique, $A \subset X$, $a \in \bar{A}$, E métrique et (f_n) une suite de fonctions de A dans E convergeant uniformément sur A vers f. Si chaque f_n possède une limite b_n en a et si E est complet alors la suite (b_n) converge vers b et la fonction f possède la limite b en a.

[H] p235 **c/ex 7** : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)}_{\frac{\pi}{2}} \neq \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{0}$

[NOU] p73 **cor 8** : Soient X topologique, $A \subset X$,
$\sum u_n$ une série uniformément convergente de fonctions de A dans E métrique. Si les fonctions u_n ont une limite b_n en a et si E est complet, la série $\sum b_n$ converge et
$\sum u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum b_n$.

ex 9 : $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(z)$ uniformément sur tout compact [NOU] p73

c/ex 10 : Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. [H] p259
Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in [n;n+1[\\ 0 & \text{si } x \in [0;n[\cup[n+1;+\infty[\end{cases}$

$\sum f_n = F$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2. Limite et dérivabilité :

ex 11 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais f' ~~n'est pas dérivable~~ n'a pas de limite à droite et à gauche en 0. [H] p166

thm 12 : (de dérivation d'une limite) [NOU] p78
Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, (f_n) suite de fonctions et g une fonction à valeurs complexes sur I.
Si
- chaque f_n est de classe C^1 sur I
- $f_n' \to g$ uniformément sur tout segment de I
- $n \mapsto f_n(a)$ a une limite $b \in \mathbb{C}$

Alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction f définie par $f(x) = b + \int_a^x g(t)\,dt$.
f est de classe C^1 et $f' = g = \lim_{n\to+\infty} f_n'$.

c/ex 13 : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers $|x|$ et $|x|$ n'est pas dérivable en 0 alors que les f_n sont $C^\infty_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. [POM] 188

c/ex 14 : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$. La fonction g limite de (f_n') est différente de f' avec $f_n \xrightarrow[\text{uniformément}]{} f$ [H] p241

ex 15 : la fonction somme de $\sum \frac{1}{n!} \exp(2^n ix)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ [POM] p191

thm 16 : de Schwarz : [NOU] p79
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert.
On suppose que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur U, continues en $a \in U$.
Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

[Gou] p309 c/ex 17 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$(x;y) \mapsto \begin{cases} xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0)$$

3. Séries entières :

[Gou] p252 **thm 18 :** d'Abel angulaire (DEVT)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 tel que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur $D(0;1)$.
Soit $\theta_0 \in [0;\frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}; |z|<1, \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0;\theta_0], z = 1-\rho e^{i\theta}\}$
Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \to \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n$

ex 19 : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

thm 20 : taubérien faible
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f sa somme sur $D(0;1)$. On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}, \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$
Si $a_n = o(\frac{1}{n})$, $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

II. Limite et intégrale :

1. Interversion limite et intégrale :

[BP] chp 8 **thm 21 :** de Beppo Levi
Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim\limits_n f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable et $\int_X \lim\limits_n f_n d\mu = \lim\limits_n \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Lemme 22 : de Fatou
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives. Alors $0 \leq \int_X \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu \leq +\infty$

thm 23 : de convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $L^1(\mu)$ vérifiant :
* $f_n(x)$ converge presque partout quand $n \to +\infty$
* il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-presque partout.

Alors il existe $f \in L^1(\mu)$ telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ μ-presque partout et $\lim\limits_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

~~ex 24 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$~~

cor 25 : Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.
a) Si les fonctions φ_n sont positives $\forall n \geq 1$, alors
$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\Big) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n d\mu$$
b) Si $\sum\limits_{n\geq 1} \int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty$ alors les fonctions φ_n, $\sum\limits_{n\geq 1} |\varphi_n|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$ sont μ-intégrables.
En outre, $\int_X \Big(\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n\Big) d\mu = \sum\limits_{n\geq 1} \int_X \varphi_n d\mu$.

2. Intégrales dépendant d'un paramètre :

thm 26 : (continuité sous le signe intégrale)
Soient $(E;d)$ espace métrique et $v_\infty \in E$. Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$
Si a) $\forall v \in E$, $x \mapsto f(v;x)$ est mesurable de $(X;\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K};\mathcal{B}(\mathbb{K}))$
b) $v \mapsto f(v;x)$ est continue en v_∞ μ-presque partout
c) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall v \in E$, $|f(v;x)| \leq g(x)$ μ presque partout
Alors $F(v) := \int_X f(v;x) \mu(dx)$ est définie $\forall v \in E$ et est continue en v_∞.

ex 27 : $f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dt}{1+t^x}$ est continue sur $]1;+\infty[$

thm 29 : (dérivation sous le signe intégrale)
On suppose que $E = I$ où I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $v_\infty \in I$. Si la fonction f vérifie
a) $\forall v \in I$, $f(v;\cdot) \in L^1(\mu)$
b) $\frac{\partial f}{\partial v}(v_\infty;x)$ existe pour μ presque tout x ens. négligeable non dépendant de v_∞

c) il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall v \in I$,

$|f(v;x)-f(v_0;x)| \leq g(x)|v-v_0|$ pour μ presque tout x

Alors la fonction $F(v) := \int_X f(v;x)\mu(dx)$ est définie en tout point $v \in I$, dérivable en v_0 de dérivée

$F'(v_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial v}(v_0;x)\mu(dx)$.

[H] p224 ex 28: $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $(x;t) \mapsto xe^{-xt}$; $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x;t)dt$

f est continue mais F n'est pas continue en 0.

III. Applications :

1. théorème de Fubini :

[H] p125 def 30: Soit $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$.

On dit que $\sum\sum_{n\ p} u_{n,p}$ converge si $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p}$ converge et $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ converge

avec $S_n = \sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p}$.

thm 31: de Fubini :

Soit $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$. On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est absolument convergente et on pose $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

Si la série $\sum_{p \geq 0} S_p$ converge alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ est absolument convergente et en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n := \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$, $\sum_{n \geq 0} T_n$ converge

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$

c/ex 32: $u_{n,p} = \begin{cases} -\frac{1}{2^n} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$. $\sum_{p \geq 0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = 0$

$\sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ diverge

c/ex 33: $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ -\frac{1}{2^{p-n}} & \text{si } n < p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = 0 \neq 2 = \sum_{p \geq 0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

2. Intégrale dépendant d'un paramètre :

thm 35: méthode de Laplace (DEVT)

Soit $I =]a;b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ (a ou $b = \pm\infty$ non exclu)

Soit $\varphi \in C^2(I;\mathbb{R})$ et $f \in C^0(I;\mathbb{R})$ telle que

a) $\exists x_0 \in I$, $\varphi'(x) = 0 \iff x = x_0$ et $\varphi''(x_0) < 0$

b) $f(x_0) \neq 0$ et $\forall t > 0$, $\int_a^b e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < +\infty$

Alors $\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{2\pi}\, f(x_0)}{\sqrt{-\varphi''(x_0)}}$

3. Séries de Fourier :

app 36: formule sommatoire de Poisson : [GOU] p272

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $f(x) = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi nx}$ où $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt} dt$

4. Interversion série-intégrales

ex 37: $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ [XENS3] p212

5. Produit de Cauchy :

prop 38: Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors le produit de leurs somme est la somme d'une troisième série convergente absolument : [NOU] p 77

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

ex 39: $\sum_{n \geq 1} \frac{n z^n}{1-z^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$ si $z \in \mathbb{C}$ est de module < 1.

app 34: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1;n]\!]$ avec par convention $B_0 = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, [XENS] p 14

$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$ (Nombres de Bell)

Références :

- [POM] : Alan Pommellet : "Agrégation de Mathématiques, cours d'analyse "
- [H] : Bertrand Hauchecorne "Les contres exemples en mathématiques " 2e édition
- [ZQ] : Hervé Queffélec, Claude Zuily "Analyse pour l'agrégation" 3e édition
- [NOU] : Ivan Nourdin " Agrégation de mathématiques, épreuve orale " 2e édition
- [GOU] : Xavier Gourdon "Les maths en tête, analyse " 2e édition
- [BP] : Marc Briane, Gilles Pagès, "théorie de l'intégration" 3e édition
- [XENS 3] : XENS. Analyse 3
- [XENS] : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas "Exercices de mathématiques, oraux XENS, Algèbre 1" 2e édition

Autres développements possibles :

- Formule sommatoire de Poisson
- Lemme de Baire (un peu court)
- phase stationnaire
- fonction Γ en rajoutant holomorphie sous le signe intégral dans II. 2.
- nombres de Bell