Leçon 247 : Exemples de problèmes d'interversion de limites.

I - Suites et séries de fonctions

A - Convergence simple/uniforme d'une suite de fonctions

Théorème 1 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, f_n est continue en x_0 alors f est continue en x_0.

Exemple 2 : $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Remarque : Une limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue.

Exemple 3 : $(f_n)_{n\geq 0} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ converge simplement

vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \in [0,1[$, 1 si $x = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^n \neq \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \lim_{n\to+\infty} x^n .$$

Corollaire 4 : Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction discontinue alors (f_n) ne converge pas uniformément.

Contre-exemples 5 : $(f_n)_{n\geq 0} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ CVS vers 0 ;

$(g_n)_{n\geq 1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\frac{x}{n})$ CVS vers 0 mais pas uniformément.

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \neq \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$$

Théorème 6 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur U qui converge simplement vers une fonction f. Si g est définie sur U et $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément vers g alors f est dérivable sur U et $f' = g$.

Exemples 7 : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$(f_n)_{n\geq 0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ CVU vers $0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mais $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) \neq 0$.

$(f_n)_{n\geq 0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ CVU vers $(x \mapsto |x|)$ qui n'est pas dérivable en 0.

B - Séries entières

Théorème 8 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. $R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} (|a_n|^{\frac{1}{n}})}$ avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Théorème 9 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors le rayon de convergence est l'inverse de cette limite.

Exemples 10 : $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge pour tout z de module 1.

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ converge pour tout z de module 1.

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.

VPT1] **Théorème 11**: Soit $\sum_{n\geq0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum_{n\geq0} a_n$ converge. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z|<1 \text{ et } \exists \rho>0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1-\rho e^{i\theta}\}$

On a alors $\lim_{\substack{z\to1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} \sum_{n\geq0} a_n z^n = \sum_{n\geq0} a_n$.

Exemple 12: $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. $\sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

[VPT1] **Théorème 13**: Soit $\sum_{n\geq0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \sum_{n\geq0} a_n x^n$ existe et $a_n = o(\frac{1}{n})$.

On a alors $\sum_{n\geq0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq0} a_n = S$.

Contre-exemple 14: $\lim_{\substack{z\to1 \\ |z|<1}} \sum_{n\geq0} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$

mais $\sum_{n\geq0} (-1)^n$ diverge.

Théorème 15: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geq0}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. f est alors holomorphe et $(f_n')_{n\geq0}$ converge uniformément vers f' sur les compacts.

Exemple 16: $\zeta : \{s \in \mathbb{C}, Re(s)>1\} \to \mathbb{C}$, $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ $\in \mathcal{H}(\{s\in\mathbb{C}, Re(s)>1\})$

II - Intégrales

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

A - Théorèmes de convergence monotone et dominée et leurs conséquences

Théorème (convergence monotone) 17: Soit $(f_n)_{n\geq0}$ une suite de fonctions mesurables sur X telle que:
- Pour presque tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n\geq0}$ est croissante et positive
- Pour presque tout $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$ avec $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

f est alors mesurable et on a $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f \, d\mu$.

Application 18: Si $(a_{i,j})_{\substack{i\geq0 \\ j\geq0}}$ une famille de nombres réels positifs alors $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$.

Exemple 19: $\sum_{n\geq2} \sum_{p\geq2} \frac{1}{n^p} = \sum_{p\geq2} \sum_{n\geq2} \frac{1}{n^p} = \sum_{n\geq2} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$.

Lemme 20 (Fatou): Soit $(f_n)_{n\geq0} \in (\overline{\mathbb{R}}^{+X})^{\mathbb{N}}$, on a alors

$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Théorème 21 (Convergence dominée): Soit $(f_n)_{n\geq0} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X telle que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe pour presque tout $x \in X$. Si il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ alors f est intégrable et on a

$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Exemple 22: $\sum_{n\geq0} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$

Si A est une algèbre de Banach et $a \in A$ alors $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{a}{n})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$

Contre-exemple 23: $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (\frac{x}{n^2} + \frac{1}{n} - 1) \mathbb{1}_{]n^2-n, n^2]}(x) + (\frac{1}{n} + 1 - \frac{x}{n^2}) \mathbb{1}_{]n^2, n^2+n]}(x)$

CVU vers 0 sur $\mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 0$ $f_n \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $0 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} 0 \, dt$.

Soit E un espace métrique, $f : E \times X \to \mathbb{C}$, on pose

$F : E \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_X f(t,x) \, d\mu$

Théorème 24: Si on a: - $\forall t \in E$, $f(t, \cdot)$ mesurable
- Pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ continue sur E.
- $\exists g \in L^1(X)$ telle que $\forall t \in E$, presque tout $x \in X$, $|f(t,x)| \leq g(x)$

Alors F est continue sur E.

Exemple 25 : $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$ n'est pas continue en 0, mais est continue sur tout compact de $]0,+\infty[$.

Théorème 26 : Supposons : - $\forall t \in E$, $f(t,\cdot) \in L^1(X)$.
- $\exists A \subset X$, $\mu(A) = 0$, $\forall x \in E \setminus A$, $f(\cdot,x)$ dérivable sur E.
- Pour tout compact K de E, $\exists g \in L^1(X)$ telle que $\forall t \in K$, $\forall x \in X$, $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$.

On a alors pour tout $t \in E$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) \in L^1(X)$ et F est dérivable sur E avec $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$.

Exemple 27 : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x^2 e^{-t|x|} dt$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 28 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ telle que
- $\forall z \in \Omega$, $f(z,\cdot) \in L^1(X)$
- $\exists A \subset X$, $\mu(A) = 0$, $\forall x \in E \setminus A$, $f(\cdot,x) \in H(\Omega)$
- $\forall K$ compact de Ω, $\exists g_K \in L^1(X)$ telle que $\forall z \in K$, $\forall x \in E \setminus A$, $|f(z,x)| \leq g_K(x)$.

On a alors F holomorphe sur Ω.

Application 29 : $\Gamma : \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Théorème 30 (Fubini) : Soit $(Y, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ mesurable sur $X \times Y$.
(i) Si $0 \leq f \leq \infty$ et $\varphi(x) = \int_Y f(x,y)\, d\lambda(y)$, $\psi(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ alors φ est $\mathcal{F}$-mesurable, ψ est $\mathcal{F}_2$ mesurable et $\int_X \varphi\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\, d\mu\, d\lambda = \int_Y \psi\, d\lambda$

(ii) Si f est à valeurs complexes et $\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x\, d\lambda$ et $\int_X \varphi^*\, d\mu < +\infty$ alors $f \in L^1(X \times Y)$.

(iii) Si $f \in L^1(X\times Y)$ alors $f(x,\cdot) \in L^1(Y)$ pour presque tout x, $f(\cdot,y) \in L^1(X)$ pour presque tout y, $\varphi \in L^1(X)$, $\psi \in L^1(Y)$ et $\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X\times Y} f\, d\mu\, d\lambda = \int_Y \psi\, d\lambda$.

Exemple 31 : $\iint_{[0,2]\times[1,2]} y e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_1^2 y e^{xy} dx\right) dy = \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}$

B - Analyse de Fourier

Déf 32 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les coefs de Fourier de f sont :
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$

On appelle série de Fourier de f, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ ou encore $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$.

Théorème 33 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et C^0 par morceaux alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |b_n(f)|^2$ convergent et on a
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Théorème 34 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h \mapsto \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$ soit bornée au voisinage de 0 alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$

Théorème 35 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, C^0 et C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 36 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \pi^4/90$.

Application 37 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^1 vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum f(x+n) = \sum \left(\int^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt}\right) e^{2i\pi nx}$

[DVPT 2]