249

Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

I- Construction de suites de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes:

1) Définition: [O 1 p243]

• **Déf 1**: X v.a.r. suit une loi de Bernoulli de paramètre p, noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $P_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$

• **Prop 2**: Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$ et $\varphi_X(t) = (1-p) + pe^{it}$

• **Rq**: - Cette loi modélise un tirage pile ou face ou aussi le tirage de boules blanches en proportion p et de boules noires en proportion $(1-p)$

- Si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, alors $X = \mathbb{1}_{[0,p]}(U) \sim \mathcal{B}(p)$

2) Construction d'une suite finie:

• **Cas général**: A partir de $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ $(i=1,2)$ deux espaces probabilisés, X_i une v.a. de loi P_i, on peut construire $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \otimes P_2)$ un nouvel espace probabilisé sur lequel la v.a. $X = (X_1, X_2)$ est bien définie

• **Cas Bernoulli**: Ainsi, on peut bien construire une suite finie de Bernoulli sur $\{0,1\}^n$.

3) Construction d'une suite infinie: [O 2 p52-61]

La généralisation aux suites infinies nous conduit à considérer $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Cependant, l'existence d'une mesure produit de proba sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas évidente.

• **Thm 3 [Kolmogorov]**: Soit $(E_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \geq 1}$ une famille d'espaces probabilisés. Soient $\Omega = \prod_{i \geq 1} E_i$, $\mathcal{A}$ la tribu produit des $\mathcal{B}_i$, $i \geq 1$. [B-L p80]
Alors, $\exists ! P$ mesure de proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tq $\forall n \geq 1$, $\forall C_n \in \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$, $P(A) = P_1 \otimes \dots \otimes P_n(C_n)$ où $A = C_n \times E_{n+1} \times \dots$ ADMIS

• **Cas particulier sans Kolmogorov**: [O 2 p52-61]
On se place sur $\Omega = [0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue.

• **Déf 4 [Développement dyadique]**: Pour tout $x \in [0,1[$, on définit les suites $(D_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ par: $R_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor$ et $R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x)$.
$(D_n(x))_n$ est le développement dyadique de x.

• **Rq**: • $D_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$
• Le développement dyadique d'un réel n'est pas toujours unique (expl: $\frac{1}{2} = 0,100\dots = 0,011\dots$ en base 2) mais cette définition de $(D_n(x))_n$ donne un unique développement.

• **Prop 5**: Soit $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \lambda)$ l'espace probabilisé où λ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0,1[$. Alors, sur cet espace, $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

• **Corollaire 6** : Soit $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite de v.a.r $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \lambda)$ indép et telles que $X_j \sim \mu_j$ $\forall j\in\mathbb{N}^*$.

Le corollaire se démontre en 2 étapes :

• **Rq** : - on prouve l'existence d'une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{U}_{[0,1[}$ à l'aide de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

- on conclut grâce à la fonction pseudo-inverse.

• **Réciproque** [de la Prop 5] : On suppose que l'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et d'une suite de v.a. iid $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque Z_i est une v.a. sur Ω à valeurs dans $\{0,1\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$. On définit une mesure λ_p sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[})$ par : $\forall A\in\mathcal{B}[0,1[$,

$$\lambda_p(A) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega, \exists x\in A, \forall j\geq 1, D_j(x) = Z_j(\omega)\})$$

Si $p=\frac{1}{2}$, on obtient la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$ et si $p\neq\frac{1}{2}$, on obtient une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue.

[O2 p408] • **Application 8** [Construction de Chaînes de Markov] : $g : E\times\mathbb{R} \to E$ application mesurable avec E ensemble dénombrable muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(E)$. Soit X_0 une v.a. à valeur dans E, soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ v.a. de loi $\mathcal{U}_{[0,1[}$. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$.

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène relativement à la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{A}_0 = \sigma(X_0)$ et $\mathcal{A}_n = \sigma(X_0, U_1, \dots, U_n)$ pour $n\geq 1$.

II - Construction de variables aléatoires à partir de v.a. de Bernoulli :

• **Prop 9** [Loi Binomiale] : Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie de v.a. iid de Bernoulli de paramètre p. [O1 p90]
Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ie $P(S_n=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ avec $k\in[\![1,n]\!]$

• **Prop 10** : Si $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$ et $\varphi_X(t) = (pe^{it}+(1-p))^n$

• **Prop 11** [Loi géométrique et binomiale négative] : [O1 p105]
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{B}(p)$. $\forall n\geq 1$, on définit par récurrence $(T_n)_n$ par : $T_1 = \inf\{k\geq 1, X_k=1\}$ et $T_{n+1} = \inf\{k>T_n, X_k=1\}$.
Alors, $T_1, T_2-T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$ sont iid de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (ie $P(T_1=n) = p(1-p)^{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$)
De plus, $\forall n>1$, $T_n\sim\mathcal{B}^-(n,p)$: loi binomiale négative ie $P(T_n=l) = \begin{cases}\binom{l-1}{n-1}p^n(1-p)^{l-n} & \text{si } l\geq n \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

• **Thm** [de Poisson] 12 : Soit $(p_n)_n$ une suite de réels de $]0,1[$ tq $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ (où $\lambda>0$). [O1 p226]
On considère $\forall n\in\mathbb{N}$ une v.a. S_n de loi $\mathcal{B}(n,p_n)$.
Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, la suite $(P(S_n=k))_n$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} P(S_n=k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$
donc $(S_n)_n$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$: loi de Poisson.

[O2 p127-128]

III - Théorèmes limites appliqués aux v.a. de Berno

• **Thm 13 [Loi faible des grands nombres]** : [O1 p284-286]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. iid tq X_1 admet un moment d'ordre 2. Alors $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ CV en probabilité vers $m = \mathbb{E}(X_1)$.

• **Corollaire 14 [Thm de Bernoulli]** : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de même proba p. Alors la suite de v.a. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}_{A_j}$ CV en proba vers p.

• **Thm 15 [de Bernstein]** [Z-Q p518-519]
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On pose :
- $\forall h \in]0,1]$, $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v|\le h\}$
- $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$, $B_n(x) = B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$

(n^e polynôme de Bernstein)

Alors 1) $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

2) $\exists C>0, \forall n\geq 1, \|f-B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) L'estimation 2) est optimale : $\exists f$ continue, $\delta>0$ tq $\|f-B_n\|_\infty \geq \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

DVT 1

[O2 p314]

• **Thm 16 [Central-limite]** : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. iid non constantes, tq $\mathbb{E}(X_1^2)<+\infty$. Alors
$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma_{X_1}}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j - n\mathbb{E}(X_1)\right)$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
En particulier, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ tq $a<b$,
$\mathbb{P}(a<Y_n\leq b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

• **Thm 17 [Loi forte des grands Nombres (cas borné)]** :
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles iid et bornées (ie $\exists C>0$ tq $|X_1|\leq C$). Alors
$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$.

DVT 2

• **Application 18 [Intervalle de confiance]** :
On peut construire un intervalle de confiance asymptotique approché pour p :
$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{\alpha\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{S_n}{n} + \frac{\alpha\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\right) = 1-2q$ où α est le quantile d'ordre $1-q$.

IV - Ruine du joueur : [O2 p380]

. Jeu de pile ou face : pile rapporte 1€, face fait perdre 1€.
- gain après n lancers : $S_n = \sum_{i=1}^{n}X_i$ où $X_i = 2Y_i - 1$ et $(Y_i)_i$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$.
- fortune initiale du joueur : $a<+\infty$
- fortune de son adversaire : $b<+\infty$

Il cesse de jouer lorsqu'il a perdu toute sa fortune ou a gagné toute la fortune de son adversaire. On note
$T = \inf\{n\in\mathbb{N}, S_n = 0 \text{ ou } S_n = a+b\}$ le temps d'arrêt du jeu. On a $\mathbb{E}(S_T) = (2p-1)\mathbb{E}(T) + a$ et
$\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right) = 1$ où $q = 1-p$.
Si $p=q=\frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbb{E}(T) = ab$
Si $p\neq\frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$ et
$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}(a+b) - a\right)$

[O 1] Ouvrard Probabilités 1
[O2] Ouvrard Probabilités 2
[B-L] Barbe Ledoux Probabilité
[Z-Q] Zuily Queffelec Analyse pour l'agregation

Autres Développements possibles :

* Théorème Central Limite [Z-Q]
* Problème de la ruine du joueur [O2]
* Estimation des grands écarts [Lesigne]
* Evénements rares de Poisson [O2]