Motivation : Une des motivations des probabilités est de modéliser des événements de la vie courante. Pour cela, on peut s'intéresser à des expériences facilement réalisables, par exemple au pile ou face, ou plus généralement à une loi de Bernoulli.

Def 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, noté $X \sim \mathcal{B}(p)$, si $\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$

exemple
- pile ou face $\sim \mathcal{B}(1/2)$ si la pièce est équilibrée
- $\mathbb{1}_A$, avec $\mathbb{P}(A) = p$, suit une loi $\mathcal{B}(p)$
- toute expérience à deux états : réussite ou échec.

Moments $\mathbb{E}X = p$ et $\mathbb{V}X = p(1-p)$

Variante : loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=-1) = 1-p$

Pour des modèles élaborés, on peut vouloir répéter une expérience suivant une loi de Bernoulli.

I) Suites de variables indépendantes.

1) Indépendance [B & L, IV]

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Déf Une famille d'événements $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ est mutuellement indépendante si pour toute partie finie $J \subset I$, on a
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

exemple 3 on lance deux dés D_1 et D_2 en même temps. Soient $A = \{D_1 \text{ donne } 4\}$ et $B = \{D_2 \text{ donne } 3\}$.

On a $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ i.e. $A \perp\!\!\!\perp B$

Interprétation : la réalisation de l'événement A n'influence pas la réalisation de l'événement B.

Contrexemple 4 : A et B comme ci-dessus, $C = \{D_1 + D_2 \text{ donne } 7\}$
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ car $\mathbb{P}(C) < 1$.

remarque 5 : ici $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ d'où l'indépendance 2 à 2 n'implique pas l'indépendance de la famille.

Exemple 6 : si $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P} = \lambda$ (= mesure de Lebesgue)
si $A_n = \bigcup_{1 \le k \le 2^{n-1}} \left] \frac{2(k-1)}{2^n} ; \frac{2k-1}{2^n} \right]$, $(A_n)_{n \ge 1}$ est mutuellement indépendante. ((A_n) = décomposition dyadique de $[0,1]$).

Définition 7
- Une famille $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de sous tribus de $\mathcal{A}$ est dite indépendante si $\forall A_i \in \mathcal{A}_i$, $(A_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante.
- Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de v.a. est dite indépendante si les tribus engendrées $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ sont indépendantes.

Exemple 8 : si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, si A_n comme ci-dessus, $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. indépendante.

question : On se donne une suite de lois $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Peut-on construire une suite de v.a. indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i \sim \mathcal{L}_i$?

2) Existence de suites de v.a. indépendantes suivant une suite de lois $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ données. [Ouv 2, 9.3]

La preuve de l'existence d'une telle suite peut se faire en utilisant une suite de v.a. indépendante de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Prouvons l'existence d'une telle suite

Définition 9 : Développement dyadique :
Si $x \in [0;1[$, on définit $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $R_0(x) = x$ et pour $n > 0$: $\begin{cases} D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor \\ R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x). \end{cases}$

$(D_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le développement dyadique de x :

proposition 10 : Si $x \in [0;1[$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n(x)}{2^n}$

Remarque 11 : problème d'unicité pour les rationnels dyadiques $1/2^{j-1} = \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$. Ce sont les seuls cas de non unicité que l'on règle en choisissant le développement dyadique fini.

proposition 12 Sur $([0;1[, \mathcal{B}([0;1[), \lambda)$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d de loi $\mathcal{B}(1/2)$, et $X = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n}{2^n}$ suit une loi uniforme sur $[0;1[$ pour la mesure de Lebesgue.

Remarque 13 : La construction des (D_n) est équivalente à la construction de la mesure de Lebesgue sur $[0;1[$. Si on considérait une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \neq \frac{1}{2}$, $p \in]0;1[$, la mesure issue serait étrangère à la mesure de Lebesgue.

On considère notre suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une partition de $\mathbb{N} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ avec $\# N_j = +\infty$. On définit alors $Y_j = \sum_{i_k \in N_j} 2^{-k} D_{i_k}$ où $N_j = \{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots\}$

proposition 14 La suite $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0;1[$.

Soit une suite de lois $(\mathcal{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On considère les fonctions de répartition associées : $F_j : x \mapsto \mathcal{L}_j(]-\infty; x])$ et on considère l'inverse généralisé de F_j : $G_j : t \in \mathbb{R} \mapsto \inf\{x \text{ tq } F_j(x) \geq t\}$.

Lemme 15 : Si $X_j = G_j(Y_j)$, alors $X_j \sim \mathcal{L}_j$.

On vient de construire une suite de v.a. $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $X_j \sim \mathcal{L}_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, et telle que $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est indépendante.

III Suites de v.a de Bernoulli indépendantes

On va voir ici que l'on peut construire diverses lois sans passer par le développement dyadique mais en utilisant les propriétés de variables de Bernoulli et leur asymptotique.

1) Suites finies [Ouv 1, 3, 5]

- **Loi de Rademacher** : si $X \sim \mathcal{B}(1/2)$, $R = 2X - 1$ suit une loi de Rademacher : $\mathbb{E}R = 0$, $\mathbb{V}R = 1$.
- **Loi binomiale** : Soit $X_1, \dots, X_N$ des v.a. i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$. Si $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, S_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$ $\mathbb{E}S_N = Np$, $\mathbb{V}S_N = Np(1-p)$.

Application 16 On lance N fois une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir k pile vaut $\mathbb{P}(S_N = k) = C_k^N p^k (1-p)^{N-k}$ $(p = \frac{1}{2})$.

2) Suites infinies i.i.d et asymptotique.

- **Loi géométrique** : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $G = \inf\{X_n = 1\}$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p.

Illustration 17 : Vieille voiture : probabilité de démarrer $p \in [0;1]$. Alors probabilité de démarrer du $k^{ième}$ coup : $\mathbb{P}(G = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Théorème 18 de Moivre Laplace [Ouv 7.1 + Bou Chaf p75, p265]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ soit $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$
Alors $\mathbb{P}\left(a \leq \sqrt{n} \frac{S_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$.

Application :

Théorème 19 de Bernoulli :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, alors $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{\{X_n = 1\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p$.
d'où $\theta_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\{X_n = 1\}}$ est un estimateur consistant de p. Si $\alpha \in]0;1[$ et si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, soit a tel que $\mathbb{P}(|Z| \leq a) = 1 - \alpha$. Alors le théorème 18 nous donne un intervalle de confiance de niveau α pour p :
$I(p) = \left[S_n - a \left(\frac{S_n(1-S_n)}{n}\right)^{1/2}, S_n + a \left(\frac{S_n(1-S_n)}{n}\right)^{1/2} \right]$

3) Suite de v.a de Bernoulli non i.i.d.

<u>Théorème 20</u> Des événements rares de Poisson.

Soit $(M_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{*\mathbb{N}}$, $(A_{n,m})_{n\geq 1, m\geq 1}$ des événements indépendants. Soit $X_{n,m} = \mathbb{1}_{A_{n,m}} \sim \mathcal{B}(p_{n,m})^{m\leq M_n}$ avec $p_{n,m} = \mathbb{P}(A_{n,m})$.

Si • $\sum_{m=1}^{M_n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$

• $\max_{m=1,\dots,M_n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alors $\sum_{m=1}^{M_n} X_{n,m}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

<u>Exemple 21 : File d'attente.</u>

On considère une banque qui a N clients "indépendants". On note $A_i = \{$le $i^{ème}$ client vient à la banque aujourd'hui$\}$. Si $Z = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{A_i}$ = "nombre de clients à venir à la banque aujourd'hui". Alors, pour "N grand" et pour "$\mathbb{P}(A_i)$ petit", Z a une loi "proche" d'une loi de Poisson.

III Applications.

1) Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ [B & L, VIII, 5.9]

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite iid de loi $2\mathcal{B}(p)-1$, $p\in]0;1[$.

Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$: pour $n\geq 0$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Soit $T := \inf\{n>0 \mid S_n = 0\}$.

<u>Théorème 22</u>

On a $\mathbb{P}(T<+\infty) = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

Interprétation : si $p=\frac{1}{2}$, la marche aléatoire revient p.s. en l'origine.

2) Ruine du joueur. [Ouv 2, p 380]

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée. Il part d'un capital a, et la banque d'un capital b. À chaque étape, il lance la pièce :

→ Si il fait face il prend un jeton à la banque ;

→ Si il fait pile il donne un jeton à la banque.

Le jeu s'arrête lorsque le joueur ou la banque est ruiné. On cherche à déterminer :

- si le jeu va s'arrêter un jour ?
- au bout de combien de temps ?
- Qui va gagné ?

Soit $X_n = (1-p)\delta_{-1} + p\delta_1 \sim 2\mathcal{B}(p)-1$. On pose $q = 1-p$. On considère les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. On a alors le capital $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$ au temps n du joueur et $T = \inf\{n\in\mathbb{N}^* \mid S_n \in \{0, a+b\}\}$ le temps d'arrêt du jeux.

<u>Théorème 23 :</u>

On a $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$

De plus si $e = \mathbb{P}(S_T = a+b)$, la probabilité que le joueur ruine la banque, on a :

- si $p\neq q$, $e = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$ et $\mathbb{E}\,T = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - a\right)$.
- si $p = q = \frac{1}{2}$, $e = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{E}\,T = ab$.

3) Théorème de Weierstrass. [Z & Q, p. 518, 519].

Si $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0,1]$.

4) Inégalité de Khintchine.

Soient $u_1, \dots, u_d \in\mathbb{R}^d$ de norme au plus 1 et soient $p_1, \dots, p_d$ dans $[0,1]$. On pose $w = \sum_{i=1}^{d} p_i u_i$

<u>Théorème 24</u>

Il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in\{0,1\}$ tels que $\|w - \sum_{i=1}^{d}\varepsilon_i u_i\| \leq \sqrt{d}/2$.

Interprétation. Toute combinaison linéaire des u_i à coefficients dans $[0,1]$ peut être approchée à $\sqrt{d}/2$ près par une combinaison linéaire à coefficients dans $\{0,1\}$.

P

DV