250 Transformation de Fourier. Applications.

Tous les théorèmes sont énoncés dans $\mathbb{R}$, on peut les généraliser à $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

I) Cas des fonctions intégrables

1) Définitions et premières propriétés

[RUD] p219 **Def 1:** Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par :

- $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} \cancel{dt}$

[AA] p253 **Ex 2:** – Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$, alors $\hat{f}(t) = \frac{2\sin(xa)}{\sqrt{2\pi}\, x}$

– Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, alors $\hat{f}(t) = \pi e^{-2\pi|t|}$

le mettre ailleurs l'en mos des conseilt d'après

[OA] p115 **Lemme 3:** (Riemann-Lebesgue)

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$

[RUD] p220 **Prop 4:** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$ alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$

b) Si $g(x) = f(x-\alpha)$ alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$

c) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$

d) Si $\lambda > 0$ et $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ alors $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$

Ex 5: – Si $f(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2}$, alors $\hat{f}(t) = \lambda\pi e^{-2\pi|t| - i\alpha t}$

2) Convolution et inversion de la transformée de Fourier

[OA] p113 **Def 6:** Le produit de convolution de deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ est, s'il est bien défini : $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt$.

Prop 7: Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable, donc $(f*g)$ est bien définie. [OA] p115

De plus, $(f*g) \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Ex 8: $(f * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ [OA] p113

Thm 9: Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que g et g' sont bornées. [OA] p116

Alors $(f*g)$ est dérivable et $(f*g)' = f*(g')$.

Rq 10: Le produit de convolution régularise une fonction f en faisant une moyenne pondérée par g des valeurs de f en chaque point.

Ex 11: $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ pour $t > 0$. La fonction G_t régularise les fonctions de $L_1(\mathbb{R})$. [OA] p117

Thm 12: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. [RUD] p220

Alors $\widehat{(f*g)} = \hat{f}\hat{g}$

App 13: Il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution. → ds L^1 ... détailler [AA] p260

App 14: Si $f*f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $f = 0$ p.p.

Thm 15: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue, de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux, et telle que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k \leq m$ [AA] p254

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \leq m$ on a :

$$\widehat{(f^{(k)})}(t) = (2i\pi t)^k \hat{f}(t).$$

[LAA] p254 **Coro 16**: Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux,

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$: $|\hat{f}(t)| \leq \dfrac{\|f^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k |t|^k}$, $\forall k \leq m$.

Rq 17: Plus f est dérivable avec des dérivées intégrables, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 pour $|t| \to +\infty$.

Rq 18: On peut également montrer que, réciproquement, plus f décroît à l'infini, plus $\hat{f}$ sera dérivable.

[RUD] p224 **Thm 19**: (Inversion de Fourier).

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et si

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$, alors $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,

$g(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f = g$ p.p.

[FAA] p255 **Coro 20**: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\hat{(\hat{f})}(x) = f(-x)$

[RUD] p225 **App 21**: (Injectivité de la transformée de Fourier)

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = 0$ alors $f \equiv 0$ ds $L^1(\mathbb{R})$

II) Extension de la transformée de Fourier.

1) Dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$

[RUD] p226 **Thm 22**: (Plancherel) À chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer une fonction $\hat{f} \in L^2$ telle que :

1) Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

2) $\forall f \in L^2$, on a $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

3) $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert de L^2 sur L^2.

4) Si $\varphi_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx$ et $\psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$

alors $\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - \hat{f}\|_{L^2} = 0$ et $\lim_{A \to +\infty} \|\psi_A - f\|_{L^2} = 0$

Rmq 23: La densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 assure de façon unique la correspondance entre f et $\hat{f}$ dans L^2

Coro 24: Si $f \in L^2$ et $\hat{f} \in L^1$, on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{ixt} dt$, p.p. [RUD] p227

Ex 25: $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ [LAA] p286

et $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$.

2) Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Def 26: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,/\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty \}$ [ZUI] p107

Ex 27: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. [ZUI] p107

Rq 28: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc la transformée de Fourier est bien définie. [ZUI] p108

Ex 29: Soit $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors $\hat{G_\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$, ce qui est toujours une gaussienne.

Prop 30: 1) Les applications $u \mapsto x^\alpha u$ et $u \mapsto u^{(\beta)}$ sont C^0 de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [ZUI] p112

2) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $(f * g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$

[ZUI] p109 **Thm 31:** (Isomorphisme de Fourier)
La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire, bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Si on pose pour $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(\overline{\mathcal{F}}(v))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} v(t) e^{ixt} dt$
alors : $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = id_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$

4) Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

[ZUI] p112 **Def 32:** On définit $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ comme l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ muni de semi-normes : $\|\varphi\|_{d,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^d \varphi^{(\beta)}(x)|$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[ZUI] p114 **Thm/Def 33:** Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de T, notée $\hat{T}$, par la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:
$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
De plus, $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[ZUI] p115 **Ex 34:** $\hat{\delta}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\, \delta_0$

III Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

[GOU] p273 **Thm 35:** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$.
En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$.

[WIL] p149 **App 36:** Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a : $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}$

DEV n°1

2) Densité de polynômes orthogonaux.

Def 37: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle une fonction poids, une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n p(x)dx < +\infty$. [OA] p110

Def 38: On note $L^2(I, p)$ l'espace muni du produit scalaire : $\langle f, g \rangle_p = \int_I f(x) \bar{g}(x) p(x) dx$. [OA] p110

Prop 39: Il existe une unique famille de polynômes unitaires et 2 à 2 orthogonaux tel que $\deg(P_n) = n$. [OA] p110

Thm 40: Si $\exists a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|} p(x) dx < \infty$
Alors les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, p)$. [OA] p110

3) Applications aux EDP

- **Équation de la chaleur :** [LAA] p264

La solution $u(t,x)$ du système :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
est $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right) dy$

DEV n°2

- **Équation des ondes :** [LAA] p267

On considère l'équation :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$
Si $f \in \mathcal{C}^2 \cap L^1$, $f' \in L^1$, $f'' \in L^1$, $g \in \mathcal{C}^1 \cap L^1$ et $g' \in L^1$, alors
$\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, $u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \int_{x-at}^{x+at} \frac{g(s)}{2a} ds$ est solution.

[RUD] : Rudin, "Analyse réelle et complexe", 3e édition

[LAA] : El Haj Laamri, "Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier de fonctions"

[OA] : Beck, Malick, Peyré : "Objectif Agrégation" 2e édit°

[ZUI] : Zuily, "Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles"

[GOU] : Gourdon, "Analyse" } pour

[WIL] : Willem, "Analyse harmonique réelle" } le DEV n°1

q° plan avant dév$^{\text{mont}}$ ① $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ est injective, linéaire

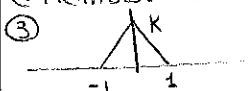
Soit $f \in L^1$, $|\mathcal{F}(f)(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(a) e^{-iat} da \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(a)| da = \|f\|_{L^1}$

$T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire

$\|T(a)\|_F \leq C \|a\|_E$, $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

② Montrer l'ex 2. 1) et 2)

③



$\chi * \chi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(a) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t-a) da = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t-a) da$

$\hat{k} = \widehat{\chi * \chi} = \hat{\chi}\,\hat{\chi} = \hat{\chi}^2$

④ Ex 2) 2) est mal placé ds la leçon

$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+a^2} e^{-2i\pi a t} da$: nécessite l'inversion de Fourier

$\mathcal{F}(e^{-|t|})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-2i\pi \xi t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-2i\pi\xi)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+2i\pi\xi)} dt$

$= \frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}$

⑤ $\Theta : t \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t^2}$

Mq Identité de Jacobi : $\forall t > 0, \Theta\left(\frac{1}{t}\right) = t\,\Theta(t)$

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Référence : GOURDON : Analyse p. 273 + WILLEM Analyse harmonique réelle p. 149 pour Coro 1

Rappels sur la transformée de Fourier

Déf : la transformée de Fourier est tout d'abord définie pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ classiquement, pour $y \in \mathbb{R}$, par

$$\hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}} u(t)\mathrm{e}^{-2i\pi ty}\mathrm{d}t$$

Elle est bien définie par théorème de comparaison.

Déf : L'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}) : \ &= \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\} \\ &= \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| = 0\} \subset C_0(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Prop : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$

Thm d'isomorphisme de Fourier : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & \boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \\ u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$ est une bijection linéaire. On a $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$.

Egalité de Plancherel : Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est continue si on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_2$.

Propr : Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}} u\hat{v}$

THÉORÈME (FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON)

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi nx}$$

Preuve :

Etape 1 :

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sait que pour tout k, $f^{(k)}(x) = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Alors, soit $M > 0$ tq $|f(x)| \leqslant M/x^2$ pour $|x| \geqslant 1$ (il s'agit ici de prendre une "marge" de x, un x assez grand puisque le O est en $+\infty$).

On veut montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall x \in [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tq $|n| > K + 1$ (pour que $|x+n| \geqslant 1$ cf[1]), $|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant$

1. Ainsi, on a $|n| > K+1 > K \leqslant |x|$ donc $|x+n| \geqslant ||x| - |n|| = |n| - |x| \geqslant K + 1 - K = 1$

$\underbrace{\frac{M}{(|n|-K)^2}}_{\text{indpt de } x}.$

Ainsi $\|f(\cdot+n)\|_\infty \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2}$.

Par comparaison des séries à termes positifs avec les sommes de Riemann, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}$. Notons $F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot+n)$ sa limite simple.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions (comme $f\in\mathcal{C}^1$) montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$$

Etape 2 :

De plus, pour $x\in\mathbb{R}$, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

donc en faisant $N\to+\infty$, on en déduit $F(x+1)=F(x)$ ie F est 1-périodique.

On calcule les coefficients de Fourier de F, pour $N\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
c_N(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi N t}\mathrm{d}t\\
&\overset{2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi N t}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi N t}\underbrace{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi N n}}_{=1}\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi N t}\mathrm{d}t = \hat{f}(N)
\end{aligned}$$

Ainsi, comme F est $\mathcal{C}^1$ et de période $T=1$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi n x}{T}}$$

D'où le résultat souhaité. ∎

Corollaire 1

Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}} \left(= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\cdot}\right)$

<u>Preuve du Corollaire 1 :</u>

Ce qui est entre parenthèses est à montrer selon le temps [3].

On fait attention ici à la notation du Willem. δ signifie δ_0 ie $\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0)$. Donc :

$$\langle\tau_a\delta,\varphi\rangle = \langle\delta,\tau_{-a}\varphi\rangle = \langle\delta,\varphi(\cdot+a)\rangle = \varphi(a) = \langle\delta_a,\varphi\rangle$$

2. on peut inverser car la série CVN et F est $\mathcal{C}^1$

3. On utilise la transformée de Fourier d'une translatée d'une fonction quelconque, $\hat{\delta}=1$ et la formule d'inversion. C'est plus ou moins fait dans le livre.

Ainsi $\tau_a \delta = \delta_a$.
On va déjà vérifier que ces sommes sont définies.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec la formule sommatoire de Poisson en $x=0$, on sait que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ existe.

Du coup, $\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ donc $\delta_{\mathbb{Z}}$ existe bien.
Vérifions que $\delta_{\mathbb{Z}}$ est une distribution tempérée ie $\delta_{\mathbb{Z}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ et $\delta_{\mathbb{Z}}$ est linéaire et continue.
On sait que $\|\cdot\|_{n,p} : \varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n \varphi^{(p)}(x) \right|$ sont les semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle| &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \left|n^2\varphi(n)\right| + |\varphi(0)| \\
&\leqslant \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right)}_{2\times\frac{\pi^2}{6}} \|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{0,0} \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{3} \underbrace{\left(\|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{0,0} \right)}_{\sum_{\substack{k\leqslant 2 \\ l\leqslant 0}} \|\varphi\|_{k,l}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\delta_{\mathbb{Z}}$ est bien une distribution tempérée ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). On peut donc calculer sa transformée de Fourier.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle &= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \hat{\varphi} \rangle && \text{(def de Fourier dans les distrib)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) && \text{(def de } \delta_{\mathbb{Z}}\text{)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) && \text{(Formule sommatoire)} \\
&= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle && \text{(def de } \delta_{\mathbb{Z}}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\delta_{\mathbb{Z}} = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}$. ■

Corollaire 2

$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2/s}$$

<u>Preuve du Corollaire 2 :</u>

Soit $\alpha > 0$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$.
On calcule, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha t^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi t n} \mathrm{d}t \overset{(u=\sqrt{\alpha}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \mathrm{d}u}_{I(n)}$$

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} \mathrm{d}t$.
On va chercher une équation différentielle vérifiée par I. Déjà, montrons que I est dérivable. Pour cela, posons $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}}$.
f est intégrable (comparaison à l'intégrale de Gauss). De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2\mathrm{i}\pi \frac{t}{\sqrt{\alpha}} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}}$.
$\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à x et à t et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \underbrace{2\pi \frac{t}{\sqrt{\alpha}} \mathrm{e}^{-t^2}}_{\text{intégb et indep de } x}$

Ainsi I est dérivable et $I'(x) = \dfrac{-2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} te^{-t^2} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt$.
D'autre part, on intègre par parties I :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-t^2}}_{\searrow} \underbrace{e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}}}_{\nearrow} dt = \underbrace{\left[e^{-t^2} \frac{\sqrt{\alpha}}{-2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} -2te^{-t^2} \frac{\sqrt{\alpha}}{-2i\pi x} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt = -\frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} te^{-t^2} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt}_{\frac{\sqrt{\alpha}}{-2i\pi} I'(x)}$$

Finalement :

$$I(x) = -\frac{\alpha}{2\pi^2 x} I'(x)$$

Donc

$$I(x) = I(0) e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$$

Et ainsi

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\alpha} I(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

On applique la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on prend $\alpha = \pi s$. ■

Réponses à de possibles questions

1. A-t-on le résultat si on affaiblit les hypothèses ? (Alexis Ropiquet)
   ↪ Oui : on n'a juste besoin de o mais on peut fabriquer un contre-exemple avec $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ et une convolution.

Notes :

✓ **A l'oral**, on ne fait qu'un des 2 corollaires selon la leçon mais attention on l'écrit dès le début avec le plan comme ça on ne se trompe pas. Avec le **Corollaire 1**, c'est un peu court, il faut bien prendre son temps. Avec le **Corollaire 2**, on a juste le temps qu'il faut, il ne faut pas speeder (sauf si on est à la bourre à la fin), ni prendre son temps. Toujours pour le **Corollaire 2**, être entre 7 et 8 min à la fin de la démo du théorème. Thm 7', coro 1 3'42 (aïe), coro 2 7'.
✓ Il faut ici savoir redémontrer l'intégrale de Gauss pour le **Corollaire 2**.
♣ Siméon POISSON (1781 - 1840) est un mathématicien, géomètre et physicien français. Sa contribution la plus essentielle concerne l'électricité et le magnétisme qu'il contribua à fonder mais il eut également une influence en astronomie, notamment sur l'attraction des planètes. En mathématique, ses travaux les plus importants portent sur la série sur les intégrales définies, sur les séries de Fourier, les intégrales de Fourier, sur le calcul des variations, sur la probabilité des moindres résultats des observations.

Équation de la chaleur

(ELHAJ LAAMRI - Mesures / Intégration)

Théorème :

Il existe une fonction u définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, C^1_t et C^2_x telle que :

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) & \forall(t,x)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x)=u_0(x) & pp\, x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

où $u_0\in L^1(\mathbb{R})$.

Analyse Soit u solution de (C), C^1_t et C^2_x.

On suppose que $\forall t\in]0,+\infty[$ $x\longmapsto u(t,x)\in L^1(\mathbb{R})$, $x\longmapsto\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\in L^1(\mathbb{R})$ et que $x\longmapsto\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)\in L^1(\mathbb{R})$.

On pose $\forall t\geq 0$ fixé : $\hat{u}(t,\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$.

Étape 1 : montrons que $\hat{u}$ est solution d'une EDO en t.

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à x on obtient $\forall\xi\in\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad \text{(linéarité de } \mathcal{F})$$

$\overset{\shortparallel}{0}$ car u sol. de (C)

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx-(2i\pi\xi)^2\,\hat{u}(t,\xi) \quad \text{(dérivation de } \mathcal{F})$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}}u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx+4\pi^2\xi^2\,\hat{u} \quad \left(\text{thm dérivation sous } \textstyle\int \text{ appliqué à } \hat{u}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi)+4\pi^2\xi^2\,\hat{u}(t,\xi)$$

Ainsi $\forall\xi\in\mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}$ est solution de l'équation différentielle en temps d'ordre 1 suivante :

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(t,\xi)+4\pi^2\xi^2\,\hat{u}(t,\xi)=0$$

La résolution de cette équation donne $\underline{\hat{u}(t,\xi)}=\hat{u}_0(\xi)\,e^{-4\pi^2\xi^2 t}$

Étape 2 : En déduire u.

On fixe $t>0$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ on sait que la transformée d'une gaussienne $g_\sigma : x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est $\hat{g}_\sigma : \xi \longmapsto \exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2)$

- On a donc ici $\forall \xi \in \mathbb{R}$: $\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(\xi)$

Donc $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(u_0 * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(x)\right)(\xi)$

- Par injectivité de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R})$ on a finalement :

$$\underline{u(t,x) = (u_0 * g_t)(x)} = \left(u_0 * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

notation : $g_t : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$
noyau de la chaleur

Synthèse

- Remarquons que $(g_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité. Donc la fonction $u(t,\cdot)$ est L^1 comme convolée de deux fonctions L^1.

- u est donc bien définie sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

- De plus, on a $\lim_{t\to 0} \| u_0 * g_t - u_0 \|_{L^1} = 0$ donc $\lim_{t\to 0} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^1} = 0$
~~donc $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall pp\, x$~~.

- u est bien solution de (C) par construction.

- D'autre part comme g_t est indéfiniment dérivable et que toutes ses fonctions dérivées sont intégrables et bornées on peut appliquer le théorème $\underline{\underline{9}}$
Ainsi $\forall t>0$ fixé on a :

  * $x \longmapsto u(t,x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot) = g_t' * u_0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
  * $x \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot) = g_t'' * u_0$ donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
  * enfin puisque $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot)$ on a $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
  * De la même façon on a u C^2_x sur $\mathbb{R}$.

- Finalement u est C^1_t sur $]0,+\infty[$ par théorème de dérivation sous $\int$.