TRANSFORMÉE DE FOURIER. APPLICATIONS.

250

I) Généralités dans l'espace L^1

1) Définitions et propriétés

$n \geq 1$

Def ① Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$.
On définit la transformée de Fourier de f par : pour $t \in \mathbb{R}^n$, $(\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t} f(x)\,dx$

Ex ② ($n=1$)
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f = 1\!\!1_{[-\alpha,\alpha]}$ alors $(\mathcal{F}f)(t) = 2\,\frac{\sin(\alpha t)}{t}$
- Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x$ alors $(\mathcal{F}f)(t) = \pi e^{-|t|}$
- Soit $\alpha > 0$, $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ alors $(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}$

Prop ③ Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

(i) Si $g(x) = f(x)\,e^{i\alpha x}$ alors $(\mathcal{F}g)(t) = (\mathcal{F}f)(t-\alpha)$

(ii) Si $g(x) = f(x-\alpha)$ alors $(\mathcal{F}g)(t) = e^{-i\alpha t}(\mathcal{F}f)(t)$

(iii) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors $(\mathcal{F}g)(t) = \overline{(\mathcal{F}g)(t)}$

(iv) Si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ alors $(\mathcal{F}g)(t) = \lambda(\mathcal{F}g)(\lambda t)$

Ex ④ ($n=1$)
- Soit $f \in L^1$ $g(x) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ alors $(\mathcal{F}g)(t) = (\mathcal{F}f)(t)\,\frac{e^{i\alpha t}-1}{\alpha}$
- Soit $f(x) = \frac{1}{1+(x-\alpha)^2}$, $\alpha > 0$ alors $(\mathcal{F}f)(t) = e^{-i\alpha t} \times \pi e^{-|t|}$

Lemme ⑤ RIEMANN - LEBESGUE.
La transformée de Fourier est une application linéaire, continue et de norme 1 de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $C_0(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, continues et nulles à l'infini, muni de la norme de convergence uniforme.

2) Convolution, dérivation et inversion

Prop ⑥ Soient f et g deux fonctions intégrables. Alors la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable.

Def ⑦ Soient f et g deux fonctions intégrables. Alors le produit de convolution de f et g défini par $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$ est bien défini.

Thm ⑧ Soient f, g dans L^1. Alors :
$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ où $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx$.

Thm ⑨ La transformée de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions en un produit de fonctions. Autrement dit $\forall f, g \in L^1$
$\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Prop ⑩ Soit f une fonction dérivable telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont intégrables ($j \in [\![1,n]\!]$)
Alors $\left(\mathcal{F}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(t) = i t_j (\mathcal{F}f)(t)$.

Thm ⑪ Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si la fonction $x \longmapsto x_j f(x)$ est intégrable. Alors $\mathcal{F}f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$\frac{\partial(\mathcal{F}f)}{\partial t_j} = -i(\mathcal{F}g)$ où $\forall x$ $g(x) = x_j f(x)$.

DEV 1

Corollaire (12) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $x \longmapsto (1+|x|)^k f(x)$ est intégrable. Alors $\mathcal{F}f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$:

$$D^\alpha(\mathcal{F}f)(t) = \mathcal{F}g \quad \text{où } g(x) = (-ix)^\alpha f(x) \quad \forall x.$$

Corollaire (13) (de la prop (10)) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que f et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont intégrables. Alors $|t|^k (\mathcal{F}f)(t) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$

càd : $\lim_{|t| \to \infty} |t|^k (\mathcal{F}f)(t) = 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$:

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = (it)^\alpha (\mathcal{F}f).$$

DEV 2

Thm (14) INVERSION.

Soit $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1$.

Si $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(t) e^{ix \cdot t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Alors $g \in \mathcal{C}_0$ et $f = g$ presque partout.

Corollaire (15) Soit f intégrable et $(\mathcal{F}f)(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^n$. Alors $f \equiv 0$ p.p dans L^1.

Ex (16) La formule d'inversion permet de trouver la transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

II) Extension de la Transformée de Fourier

1) Passage dans L^2

Thm (17) PLANCHEREL

A chaque fonction f de L^2 on peut associer la fonction $\mathcal{F}f$ de L^2 telle que :

(i) si $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier de f (comme définie dans L^1)

(ii) si $f \in L^2$, $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

(iii) l'application $f \longmapsto \mathcal{F}f$ est un isomorphisme de Hilbert de L^2 sur L^2

(iv) Si on pose $\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} (\mathcal{F}f)(t) e^{ixt} dx$, alors

$$\|\varphi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\psi_A - \mathcal{F}f\|_2 \xrightarrow[A \to \infty]{} 0$$

Def (18) L'application $\mathcal{F}f$ définie par le théorème précédent est appelée transformation de Fourier-Plancherel.

Rmq (19) On peut généraliser le théorème en se plaçant dans $\mathbb{R}^n$

Rmq (20) La densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 assure l'unicité de la correspondance entre f et $\mathcal{F}f$ dans L^2.

Corollaire (21) Soit f une fonction de L^2 telle que $\mathcal{F}f \in L^1$, alors, presque partout, on a :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(t) e^{ix \cdot t} dt.$$

Corollaire (22) Soient f et g dans L^2, alors :

$$\int f \bar{g} \, d\lambda = \int \mathcal{F}f \, \overline{\mathcal{F}g} \, d\lambda \quad \text{où } \lambda \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$

Ex (23) Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad (\mathcal{F}f)(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$

2) Dans l'espace de Schwartz

Def (24) On définit l'espace de Schwartz par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty / \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty \}$$

Rmq (25) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ alors la transformée de Fourier est bien définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Thm (26) La transformée de Fourier est un morphisme de de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3) Dans l'espace des distributions tempérées

Def (27) On définit l'ensemble des distributions tempérées comme le dual de l'espace de Schwartz. On le note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Def (28) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de u est la distribution $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Ex (29) $\mathcal{F}\delta_0 = 1$; $\mathcal{F}1 = \delta_0$

III) Applications

1) Fonctions caractéristiques en probabilités

Def (30) Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X la fonction : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{iX \cdot t})$, $\forall t$.

Rmq (31) La fonction caractéristique n'est autre que la transformée de Fourier de la densité d'une variable aléatoire continue.

Prop (32) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densités respectives f et g. Alors $X+Y$ a pour densité $f * g$ et $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Ex (33)
- Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$
- Soit $Y \sim \mathcal{C}(1)$, de densité $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ et $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$
- $X+Y$ a pour densité $f * g$ et a pour fonction caractéristique $\varphi_{X+Y}(t) = e^{-(|t| + \frac{t^2}{2})}$

2) Equation de la chaleur

Contexte (34) On se place dans un milieu supposé homogène qui ne reçoit pas d'apport de chaleur ; il est modélisé par $\mathbb{R}^n$. On connaît la température initiale en tout point du milieu ; elle est donnée par une fonction $f(x)$. Le problème consiste à savoir quelle est la température en tout point du milieu, $x \in \mathbb{R}^n$, et à tout instant $t \in [0, +\infty[$

Pb (35) Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Déterminer les fonctions u continues sur $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ telles que : (1) $u(x,0) = f(x)$

(2) u partiellement dérivable par rapport la deuxième variable et deux fois différentiable par rapport à la première sur $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ et satisfait l'équation :

$$\Delta u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$$

(3) Pour tout $T > 0$ on a $\lim_{R \to \infty} \sup_{\substack{|x| \geq R \\ 0 \leq t \leq T}} |u(x,t)| = 0$

Thm (36) La solution du problème (35) est unique et est donnée par la formule :

$u(x,t) = f * W_t(x)$ si $t \neq 0$

où $W_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$

Références

- Analyse réelle et complexe, RUDIN
- Convolution, séries et intégrales de Fourier, PEYRIÈRE
- Analyse et géométrie : Méthodes hilbertiennes, ROOS

Développements possibles.

- Equation de la chaleur
- Formule sommatoire de Poisson