250 - Transformation de Fourier. Applications.

I) Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$

1) Cas $L^1(\mathbb{R}^d)$

[1] **Def 1** Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle Transformée de Fourier de f, la fonction $\hat{f}$ définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx$$

[1] **Rem 2** Il existe plusieurs manière de définir la TF (Transformation de Fourier). Nous fixons celle-ci pour cette leçon.

[1] **prop 3** (Linéarité). Soient $f, g \in L^1 = L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:
$$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathcal{F}(f(x)) + \beta \mathcal{F}(g(x)).$$

[1] **prop 4** (Translation). Soient $f \in L^1$ et $c \in \mathbb{R}^d$:
$$\mathcal{F}(f(x-c)) = e^{i\langle c|\xi\rangle} \mathcal{F}(f(x)) = e^{i\langle c|\xi\rangle} \hat{f}(\xi).$$

[1] **prop 5** (Modulation). Soient $f \in L^1$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$:
$$\mathcal{F}(e^{i\langle x,\xi_0\rangle} f(x)) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$$

[1] **prop 6** (Changement d'échelle). Soient $f \in L^1$ et $c \in \mathbb{R}^*$
$$\mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right)$$

[1] **Coro 7** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ est à valeur dans $\mathbb{R}$ alors $\hat{f}$ est paire.

[1] **Ex 8** On définit la fonction porte : $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $\hat{\Pi}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\xi}$. $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$.

[1] **Prop 9** (Conjugaison). Soit $f \in L^1$ on a : $\mathcal{F}(\overline{f(x)}) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

[2] **th 10** (Lemme de Riemann Lebesgue). Soit $f \in L^1$, $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ est continue et bornée. De plus
$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Def 11 Soient $f, g \in L^1$. On appelle convolution de f et g $f * g$ la fonction : $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ [1] [1]

prop 12 Soient $f, g \in L^1$. $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{g}$

Prop 13 Soit $f \in C^1 \cap L^1(\mathbb{R})$. On a $\mathcal{F}(f'(x)) = i\xi \hat{f}(\xi)$ [1]

Ainsi si $f \in C^k \cap L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$

prop 14 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a : $\mathcal{F}(f(x))' = \mathcal{F}(-ix f(x))$. [1]

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}(f(x))^{(n)} = \mathcal{F}((-ix)^n f(x))$. [1]

Coro 15 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f est n fois dérivable alors $\exists C > 0$ tq $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^n}$. [1]

thm 16 Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. On a alors que la transformée de Fourier inverse est : [2]
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi.$$

Ex 17 $\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ [2]

Coro 18 Soient $f, g \in L^1$ tels que $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$. On a : [2]
$$(\hat{f} = \hat{g}) \Leftrightarrow (f = g).$$

prop 19 Soient $f, g \in L^1$ tels que $\hat{f}, \hat{g}$ et $f \cdot g \in L^1$ [2]

On a alors $\hat{f} * \hat{g} = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f \cdot g}$.

2) Cas $L^2(\mathbb{R}^d)$

thm 20 (Parseval). Soient $f, g \in L^1 \cap L^2$. [2]
$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle = \langle f | g \rangle.$$

thm 21 (Plancherel $L^1 \cap L^2$). Soient $f \in L^1 \cap L^2$, on a alors [2]

$\hat{f} \in L^1 \cap L^2$ et $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

[1] [3] thm22 (Fourier Plancherel). On peut prolonger
$\mathcal{F}: L^1\cap L^2 \to L^2$ en une application $\tilde{\mathcal{F}}: L^2 \to L^2$.
Pour tout $f\in L^2$ $\|\tilde{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ est une isométrie d'Espaces de Hilbert de L^2 sur L^2.

II) Distributions Tempérée.

1) Espace de Schwartz S.

[1] Def 23 L'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide est définit par:

$$S = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ tels que } \forall m,n\in\mathbb{N} \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \varphi^{(n)}(x)| < \infty\}.$$

[1] Ex 24 $x \mapsto e^{-x^2} \in S$

[1] Cex 25 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \notin S$ et $x \mapsto e^{-|x|} \notin S$.

[1] Def 26 On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ converge dans S vers $\varphi\in S$ si: $\forall m,n\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $(x^m\varphi_k^{(n)}(x))_k$ converge vers $(x^m\varphi^{(n)}(x))$.

[1] prop 27 $S \subset L^1\cap L^2$.

[1] Rmq 28 On peut définir $\mathcal{F}$ dans S.

[1] prop 29 Si $\varphi\in S$ alors $\hat{\varphi}\in S$.

[1] prop 30 $\mathcal{F}: S \to S$ est continue dans S.

[1] DEV 2 thm 31 (Théorème d'inversion dans S). Pour tout $\varphi\in S$ on a: $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi$

2) Distributions Tempérée

Def 32 On appelle distribution tempérée toute [1]
fonctionnelle linéaire continue définie sur S et à valeur dans $\mathbb{C}$. On note S' l'ensemble des distributions tempérées.

prop 33 Soit T une forme linéaire dans S. [1]
$T\in S' \iff \exists C>0$ et $n\in\mathbb{N}$ tels que $|\langle T,\varphi\rangle| \le C\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^n dx$

Ex 34 $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$ et $V_p(\frac{1}{x}) : \varphi \mapsto \lim_{|\alpha|\to 0}\int_{|y|>|\alpha|}\frac{\varphi(y)}{y}dy$ [1]
sont des distributions tempérées.

Def 35 Soit $T\in S'$. On appelle transformation de [1]
Fourier de T la distribution $\mathcal{F}T$ définie par:
$\forall \varphi\in S$ $\langle \mathcal{F}T,\varphi\rangle = \langle T,\mathcal{F}\varphi\rangle$

prop 36 Si $T\in S'$ alors $\mathcal{F}T\in S'$. [1]

thm 37 Soit $T\in S'$. La transformation inverse [1]
de Fourier de T est: $\langle \mathcal{F}^{-1}(T),\varphi\rangle = \langle T,\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle$. [1]

prop 38 Soit $T\in S'$. $(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-ixT)$
et ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$ $(\mathcal{F}T)^{(n)} = \mathcal{F}((-ix)^n T)$

Ex 39 $\mathcal{F}(\delta) = 1$ et $\mathcal{F}(\delta^{(n)}) = (i\xi)^n$ [1]

Rem-thm 40 (Formule sommatoire de Poisson). [1]
Si on définit la transformation de Fourier de $\varphi\in S$ par $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$. alors

on a $\forall \varphi \in S \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)$.

III Applications.

1) En probabilité

[5] **Def 41** La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est la fonction $\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$

[5] **Rem 42** Si X est une variable à densité alors $\forall t\in\mathbb{R} \quad \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$ est la transformée de Fourier inverse de f (à coéficient près).

[5] **Ex 43** si $X \sim B(n,p)$ alors $\phi_X(t) = (q+pe^{it})^n$

si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ $\left(f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)$

si X suit une loi de Cauchy de paramètre $(0,1)$ alors $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ $\left(f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\right)$.

[5] **prop 44** Soit X une variable aléatoire. φ_X est absolument continue.

[5] **thm 45** La fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine la loi de celle-ci.

[5] **thm 46** (Levy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire. On a $X_k \xrightarrow{loi} X$ si et seulement si $\varphi_{X_k}(t) \to \varphi_X(t) \ \forall t \in\mathbb{R}$.

2) Aux équations aux dérivées partielles.

[2] et [1]

prop 47 $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-bx^2}) = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$

[1]

thm 48 On considère l'équation de la Chaleur :

$$(E) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a>0, \ u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ \forall x\in\mathbb{R} \quad u(x,0) = \varphi(x), \ \varphi\in S \end{cases}$$

On cherche les solutions vérifiant $\forall t\in\mathbb{R}_+$ $x \mapsto u(x,t) \in S$. On a alors :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} dy.$$

DEV 2

Dans $\mathbb{R}^d$ l'équation devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u & \text{où } \Delta u \text{ est le Laplacien de } u. \\ \forall x\in\mathbb{R}^d, u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

et $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4at}} dy.$$