250 Transformation de Fourier. Applications.

I) Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1) Propriétés fondamentales

Def 1: Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On nomme Transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f}$ définie par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi\rangle} f(x)\, dx$$

Rem 2: D'autres définitions existent, nous ferons celle-ci dans la suite de la leçon.

Prop 3: $\mathcal{F}$ est linéaire, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est continue.

Prop 4: Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $c, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- translation: $\mathcal{F}(f(x-c)) = e^{-i\langle c | \xi\rangle} \hat{f}(\xi)$
- modulation: $\mathcal{F}(e^{i\langle x, \xi_0\rangle} f(x)) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$
- dilatation: $\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$
- conjugaison: $\mathcal{F}(\overline{f(x)}) = \overline{\hat{f}(-x)}$

Ex 5 (Gaussienne) $\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4a}$ pour $a > 0$

Lemme 6 (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. $\hat{f}$ est bornée, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ et $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Théorème 7 (Transformation inverse) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}$ est:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi$$

Ex 8 $\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|}) = \frac{2}{1+x^2}$

Rem 9: A priori, les hypothèses ne peuvent être remplies que si f est continue et tend vers 0 à l'infini (ou est égale pp. à une telle fonction)

2) Lien avec la convolution et la dérivée

Def 10: Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle convolution de f et g la fonction $f * g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, dy$

Prop 11 Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Prop 12 Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Prop 13 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$

Coro 14 Si f est m fois dérivable et $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k \leq m$, alors

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (2\pi i \xi)^m \hat{f}(\xi) \text{ et } \exists C > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^m}$$

Prop 15 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))$

Si $x^m f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est m fois dérivable et $\hat{f}^{(m)}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^m f(x))$

Rem 16 La transformation de Fourier échange régularité et décroissance.

II) Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz et $L^2(\mathbb{R})$

Def 17: L'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide est:

$$S = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(n)}(x)| < \infty \right\}$$

Ex 18: $e^{-x^2} \in S$, $e^{-|x|} \notin S$ et $\frac{1}{1+x^2} \notin S$

Proposition: S est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et une algèbre pour la convolution.

Prop 20: $S \subset L^1 \cap L^2$

Rem 21: Pour $f \in S$, $\mathcal{F}(f)$ est donc bien défini.

Def 22: Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S converge vers dans S vers f si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $(x^m \varphi_k^{(n)}(x))_k$ converge uniformément vers $x^m \varphi^{(n)}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Prop 23: Soit $f \in S$. Alors $\hat{f} \in S$.

Prop 24: $\mathcal{F} : S \to S$ est une application linéaire continue bijective.

Prop 25 (Formule de Plancherel) Soient $f, g \in S$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,\bar{\hat{g}}(x)\,dx$$

2) Transformation de Fourier dans S

Prop 26: S est dense dans L^2

DEV 1

Théorème 27 (Fourier-Plancherel)
$\mathcal{F} : S \to S$ se prolonge en une application $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ qui est une isométrie d'espace de Hilbert d'inverse $\mathcal{F}^{-1}(f(x)) = \mathcal{F}(f(-x))$

III) Applications

1) Aux équations aux dérivées partielles

Théorème 28: On considère l'équation de la chaleur

$$(E) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & a > 0,\ u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(x, 0) = \varphi(x), & \varphi \in S \end{cases}$$

dont on cherche les solutions u vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto u(x,t) \in S$

On a alors :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{16 a \pi^2 t}}\, dy$$

2) En probabilités

Def 29 La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle est la fonction $\Phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$

Rem 30 Si X est à densité f, alors $\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx$ est la transformée de Fourier inverse de f (à coefficient près).

Ex 31 Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$

Théorème 32: Soient X et Y deux variables aléatoires. Si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors X et Y suivent la même loi.

Théorème 33 (Levy) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Alors, $X_n \xrightarrow{loi} X$ ssi $\Phi_{X_n}(t) \longrightarrow \Phi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

3) Caractérisation des fonctions à support compact

DEV2

Théorème 34 : (Paley - Wiener) Soit $r>0$

1) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-r, r]$. Il existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, et

(*) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists C>0\ \forall z \in \mathbb{C}\ |f(z)| \leq C(1+|z|)^{-m} e^{r|\mathrm{Im}\, z|}$

2) Réciproquement, soit f $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant (*). Il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset]-r, r[$ et $\hat{\varphi}(\xi) = f(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Références

LESFARI, Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace

BONY, Cours d'analyse

ZUILY, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles