Transformation de Fourier. Applications

250

$\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne associée $|\cdot|$.

I) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

1) La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Déf 1 On appelle classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$ l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}^d, \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|<+\infty\}$

Ex 2 • $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
• $\forall a>0, \forall P\in\mathbb{C}[X], (x\in\mathbb{R}^d\mapsto P(x)e^{-a|x|^2})\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Cex 3 Les fractions rationnelles non nulles ne sont pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Prop-déf 4 Soit $p\in\mathbb{N}$. L'application $\mathcal{N}_p : \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto \sum_{|\alpha|\leq p,\ |\beta|\leq p}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|$ définit une semi-norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Déf 5 $(\varphi_n)\in(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vers $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si : $\forall p\in\mathbb{N}, \mathcal{N}_p(\varphi_n-\varphi)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. On note $\varphi_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\varphi$.

Déf 6 $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ est à croissance polynomiale si: $\exists n\in\mathbb{N}, f(x)=\underset{|x|\to+\infty}{O}(|x|^n)$

Prop 7 Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors : • $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d, \partial^\alpha\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
• $\forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées sont à croissance polynomiale, $f\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
• $\forall p\in[1,+\infty], \varphi\in L^p(\mathbb{R}^d)$

Prop 8 Soit $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\iff\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d, x^\alpha\partial^\beta\varphi\in L^1(\mathbb{R}^d)$
$\iff \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d, x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)\xrightarrow[|x|\to+\infty]{}0$.

Prop-déf 9 Si $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f*g : x\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,dy$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$, et est appelée "produit de convolution de f et g."

Prop 10 Le produit de convolution définit une loi de composition interne sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, associative et commutative.

2) Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Prop-déf 11. Pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\mathcal{F}\varphi : \xi\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\langle\xi,x\rangle}f(x)\,dx$ est bien définie, et est appelée "transformée de Fourier de φ", encore notée $\hat\varphi$.

Notation $\forall a\in\mathbb{R}^d, \forall x\in\mathbb{R}^d, \tau_a\varphi(x):=\varphi(x+a)$.

Prop 12 Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors: i) $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\hat\varphi\in\mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha\hat\varphi=\widehat{(-ix)^\alpha\varphi}$
ii) $\forall\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\widehat{\partial^\alpha\varphi}=i\xi^\alpha\hat\varphi$. En particulier, $\widehat{\nabla\varphi}=i\xi\hat\varphi$.
iii) $\forall a\in\mathbb{R}^d$: $\widehat{\tau_a\varphi}=e^{i\langle\xi,a\rangle}\hat\varphi$ et $\widehat{e^{-i\langle a,x\rangle}\varphi}=\tau_a\hat\varphi$

Prop 13 $\forall\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{\varphi*\psi}=\hat\varphi*\hat\psi$

Prop 14 $\mathcal{F}:\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\hat\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est définie et linéaire.

Lem 15 Soit $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}^d)$ et $G_A : x\in\mathbb{R}^d\mapsto\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det A}}e^{-\frac12\langle A^{-1}x,x\rangle}$
Alors $G_A\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\widehat{G_A}(\xi)=e^{\frac12\langle Ax,x\rangle}$.

Thm 16 (Inversion de Fourier) $\mathcal{F}$ est un isomorphisme (linéaire) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et : $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \forall x\in\mathbb{R}^d$, $\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat\varphi(\xi)\,d\xi$.

DEV 1

Prop 17 $\varphi_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\varphi\iff\hat\varphi_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\hat\varphi$

3) L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Déf 18 Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée si : $\exists(p,C)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^*, \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\langle T,\varphi\rangle|\leq C\mathcal{N}_p(\varphi)$.
L'espace des distributions tempérées, qui peut être vu comme le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour les semi-normes $(\mathcal{N}_p)$, est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Ex 19 - ~~Si~~ $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $p\in[1,+\infty]$, $T:\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)f(x)\,dx$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
- Si μ est une mesure bornée de $\mathbb{R}^d$, $[T:\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mu(dx)]\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
$L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ (mesures bornées) s'injectent continûment dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $\forall a\in\mathbb{R}^d$, $[\delta_a:\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\varphi(a)]\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
- $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

C-ex 20 Le caractère L^1_{loc} est suffisant pour définir une distribution, mais elle n'est pas forcément tempérée. Ex : $x\mapsto e^{ax^2}$ où $a>0$.

Déf 21 : $(T_n)\in(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si : $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n,\varphi\rangle\xrightarrow[n\to+\infty]{}\langle T,\varphi\rangle$. On note $T_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}T$

Déf 22 : Soit $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de T par : $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle\hat T,\varphi\rangle=\langle T,\hat\varphi\rangle$. On a bien $\hat T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Ex 23 : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\widehat{\delta_a}$ est la distribution associé à $x \mapsto e^{-iax}$.

Ex 24 $\widehat{vp\left(\frac{1}{x}\right)}$ est la distribution associée à $x \mapsto \begin{cases} i\pi & \text{si } x < 0 \\ -i\pi & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Thm 25 : $\mathcal{F} : T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mapsto \widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est bien définie, est un isomorphisme (linéaire) de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathcal{F}T, \varphi(-\cdot) \rangle$

Prop 26 : $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} T \iff \widehat{T}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} T$

Thm 27 [Formule sommatoire de Poisson] Soit $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Alors $\widehat{T} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$

II) Prolongement de la transformée de Fourier dans L^1 et L^2

1) Transformation de Fourier dans L^1.

Déf 28 Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f par :
$\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\,dx$.

Rq 29 Ceci coïncide avec la transformée faible "définie en I 3)

Prop 30 Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

C-ex 31 : $\hat{f}$ n'appartient pas toujours à L^1. En effet, si $f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{i\xi}{2}} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$ et $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$

Thm 32 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \| \|_p)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$

Lem 33 [Riemann-Lebesgue] Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$

Prop 34 Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, alors $\hat{f}(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)$

2) Transformation de Fourier dans L^2

Prop 35 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et
$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_2^2$

Lem 36 : $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}^d), \| \|_2)$. Plus particulièrement, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $(f \mathbb{1}_{B(0,n)}) \in (L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ converge en norme L^2 vers f.

Prop-déf 37 Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f comme la limite presque partout des $\left(\widehat{f \mathbb{1}_{B(0,n)}}\right)$, qui est bien définie.

Thm 38 [Fourier-Plancherel] Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_2^2$.

App 39 Si $f \in H^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\|\nabla f\|_2 \leq \frac{1}{2} \|f - \Delta f\|_2$

III) Applications de la transformée de Fourier

1) Fonctions caractéristiques en probabilités

Déf 40 Si X est une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est définie par : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}]$
En particulier, si $d = 1$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Rq 41. La fonction caractéristique de X correspond à la transformée de Fourier inverse de sa loi multipliée par $(2\pi)^d$.
• Si X est à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, alors : $\mathbb{E}[e^{itX}] = \mathcal{F}(f)(-t)$, par le théorème de transfert.

Ex 42 : i) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$
ii) Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (1 + p(e^{it} - 1))^n$
iii) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$
iv) Si $X \sim \mathcal{C}(a)$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = e^{-a|t|}$

Prop 43 : Si X et Y sont des v.a. indépendantes dans $\mathbb{R}^d$, alors
$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

Prop 44 : Si X et Y sont des v.a dans $\mathbb{R}^d$, alors $X \sim Y \iff \phi_X = \phi_Y$.

Prop 45 : Si X est une v.a. dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\phi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d)$ et $\forall m \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}[X^m] = \frac{\phi^{(m)}(0)}{i^m}$

Déf 46 : On dit qu'une suite (X_n) de v.a. dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une v.a X dans $\mathbb{R}^d$ si, pour toute fonction h continue bornée sur $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[h(X)]$. On note $X_n \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} X$.

Thm 47 [Critère de Lévy] $X_n \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} X \iff \phi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{simplement}} \phi$

App 48 Si $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{n})$, alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{P}(\lambda)$

Thm 49 [Théorème central limite] Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées L^2, avec $m := \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1)$.
Alors : $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Thm 50 [Événements rares de Poisson] Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, une famille finie $(A_{n,j})_{1\le j\le M_n}$ d'événements indépendants définis sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On pose : $\forall(n,j)$, $p_{n,j} := \mathbb{P}(A_{n,j})$ et $S_n := \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$ et on suppose que :
• (M_n) croît vers $+\infty$ • $\max_{1\le j\le M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ • $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$
Alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{P}(\lambda)$

2) Équations différentielles et EDP

Thm 51 [Équation d'Airy] On considère l'équation différentielle $\forall x\in\mathbb{R}$, $y''(x) = xy(x)$. Pour la résoudre, on passe dans le domaine de Fourier : $\forall \xi\in\mathbb{R}$, $\hat{y}'(\xi) = i\xi^2\hat{y}(\xi)$. $\hat{y}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1, et en la résolvant puis en passant à la transformée inverse, comme les fonctions $[t\mapsto \cos(xt+\frac{t^3}{3})]$ et $[t\mapsto \sin(xt+\frac{t^3}{3})]$ sont d'intégrale convergente (mais non intégrables) sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(xt+\frac{t^3}{3})\,dt$

Rq 52. Si $\lambda = 1$, la solution obtenue est la première fonction de Airy, notée Ai, qui est une fonction spéciale.

DEV2

Thm 53 [Équation de Schrödinger] Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ telle que :
i) $\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ii) $u(\cdot,0) = f$
iii) $\forall T>0, \forall (k,l)\in\mathbb{N}^2$, $M_{k,l}^T := \sup_{|t|<T}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t)\right|\right) < +\infty$
i.e. $u(\cdot,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t.
Cette solution s'écrit : $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2$, $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}e^{i\xi x}\,d\xi$

DEV 2

Déf 54 Soit un problème d'EDP hyperbolique, d'inconnue $u(x,t)$ où $x\in\mathbb{R}$ et $t\ge 0$. On discrétise alors l'espace avec une subdivision $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ à pas constant h_x, et le temps avec une subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à pas constant h_t. Pour $(j,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, on note u_j^n l'approximation numérique du point $u(x_j,t_n)$.

Déf 55 : Avec les notations précédentes, on dit que le schéma d'approximation par différences finies est stable si :
$\exists C>0, \forall n\in\mathbb{N}, \|u^n\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le \|u^0\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$

Thm 56 On souhaite résoudre l'EDP hyperbolique :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}, t>0. \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$
où $u_0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $c\in\mathbb{R}$ fixés. En appliquant la transformée de Fourier et le théorème de Plancherel à la fonction $u^{[n]}$ telle que : $\forall j\in\mathbb{Z}$, $u^{[n]}(x) = u_j^n$ si $x\in\left](j-\frac{1}{2})h_x, (j+\frac{1}{2})h_x\right[$, on remarque que le schéma explicite :
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c h_t}{2h_x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$
n'est pas stable, alors que le schéma implicite :
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c h_t}{2h_x}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$$
est stable.

Références : F. Golse, Distributions, analyse de Fourier, EDP, 2020
J-Y Ouvrard, Probabilités 2, Cassini, 2009.