Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications

252

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I Loi binomiale

1) Définition et premières propriétés [BAR]

Définition 1 : Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La loi binomiale de paramètre (n,p) est la loi de probabilité définie par : $\mathcal{B}(n,p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$. Pour $n=1$, on la note $\mathcal{B}(p)$, loi de Bernoulli de paramètre p

Interprétation : La loi de Bernoulli modélise une expérience aléatoire à deux issues, succès et échec. La loi binomiale est alors la loi du nombre de succès après n répétitions indépendantes de l'expérience

Exemple : Soit p la proportion de boules blanches dans une urne, alors $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi du nombre de boules blanches obtenues après n tirages avec remise.

Propriété 2 : Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ ($X \sim \mathcal{B}(n,p)$) alors : $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = (1-p+pe^{it})^n$

Proposition 3 : $\mathcal{B}(n_1,p) * \mathcal{B}(n_2,p) = \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$, ie, si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$

2) Théorèmes limites

Théorème 4 : (Loi faible des grands nombres) Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > t\right) \leq \frac{p(1-p)}{n t^2}$

[DVP1] Application : Approximation des fonctions continues sur $[0,1]$ par les polynômes de Bernstein [ZQ]

Théorème 5 : Théorème de Moivre Laplace

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ alors $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0, p(1-p))$

II Exemples de lois qui découlent de la loi binomiale

1) Loi multinomiale

Définition 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p_1, \dots p_d \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$ [BAR]

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots X_d)$ suit une loi multinomiale de paramètre $n, p_1, \dots p_d$, notée $\mathcal{M}(n, p_1, \dots p_d)$ si :

$$\mathbb{P}(X = (n_1, \dots n_d)) = \begin{cases} \frac{n! \prod p_i^{n_i}}{n_1! \dots n_d!} & \text{si } n_1, \dots n_d \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{i=1}^{d} n_i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : Si on jette aléatoirement n boules dans d boîtes distinctes, chaque boule ayant la propriété p_i d'arriver dans la boîte i, alors les nombres $(N_1, \dots N_d)$ de boules dans les boîtes suivent une loi multinomiale

Propriété 7 : Si $X \sim \mathcal{M}(n, p_1, \dots p_d)$ alors $E(X) = (np_1, \dots np_d)$, $cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$ $(i \neq j)$, $Var(X_i) = np_i(1-x_i)$

$$\varphi_X(t) = \left(\sum_{j=1}^{d} p_j e^{ip_j}\right)^n$$

Théorème 8 : Théorème de Karl-Pearson [DVP2]

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose une partition $(A_j^n)_{1 \leq j \leq k}$ de Ω. On suppose que les familles, indexées sur n, des éléments de ces partitions sont indépendantes. On suppose de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall j$, $\mathbb{P}(A_j^n) = p_j$ où $p_j > 0$ et $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. On définit $N_j^n = \sum_{l=1}^{n} 1_{A_j^l}$ et $X^2_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j^n - np_j)^2}{np_j}$

Alors $X^2_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \chi^2(k-1)$

Application : test du χ^2

2) Loi binomiale négative

[JVT] **Définition 9** : Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètre (m, p) si

$$P(X = k) = \binom{m+k-1}{m-1} p^m (1-p)^k$$

Interprétation : Si X_i est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors le nombre d'échecs avant d'obtenir m succès suit une loi binomiale négative $\mathcal{B}^-(m, p)$

Propriété 10 : Si $X \sim \mathcal{B}^-(m, p)$ alors $E(X) = m \dfrac{1-p}{p}$,

$Var(X) = m \dfrac{1-p}{p^2}$ et $\varphi_X(t) = \left(\dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}} \right)^m$

3) Loi hypergéométrique

[OAR] **Définition 11** : Soit $N, m \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre (N, m, p), notée $\mathcal{H}(N, m, p)$, si :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{m-k}}{\binom{N}{m}} & \text{si } \max(0, m-N(1-p)) \leq k, \ k \leq \min(m, Np) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interprétation : Soit une urne contenant N boules dont une proportion p est noire. Si on tire n boules sans remise, le nombre de boules noires tirées suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, m, p)

Propriété 12 : Si $X \sim \mathcal{H}(N, m, p)$, alors $E(X) = mp$

$$Var\, X = \frac{N-m}{N-1} m p (1-p)$$

Proposition 13 : Si $X_N \sim \mathcal{H}(N, m, p)$, alors

$$X_N \xrightarrow[N \to \infty]{loi} \mathcal{B}(m, p)$$

III Loi de Poisson

1) Définition et premières propriétés

Définition 14 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si : [OAR]

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Interprétation : Intervient dans la modélisation de phénomènes de comptage. Par exemple, le nombre de désintégrations atomiques pendant un intervalle de temps, le nombre d'arrivée à un guichet suivent une loi de Poisson. [OUV1]

Propriété 15 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$, [OAR]

$Var(X) = \lambda$ et $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Proposition 16 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Proposition 17 : Si $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

2) Lien avec la loi binomiale.

OUV] **Théorème 18** : Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de lois respectives $\mathcal{B}(n,p_n)$.
Alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque : Grâce à ce théorème, on peut approximer une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec p petit et n grand, par une loi de poisson de paramètre np.

· On peut généraliser ce théorème de la manière suivante :

PT] **Théorème 19** : Théorème des évènements rares de Poisson

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j}, 1\le j\le M_n\}$ d'évènements indépendants.
On pose $P(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$
On suppose que M_n tend en croissant vers $+\infty$,
que $\max_{1\le j\le M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \to \lambda > 0$
alors $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque : On retrouve bien le théorème 18 avec $M_n = n$ et $p_{n,j} = p_n \ \forall j \in [\![1,n]\!]$

3) Lois de poisson composées

Définition 20 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. [OUV1]
Et soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_i

alors $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ suit une loi dite de poisson composée

Propriété 21 : Si $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, alors $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

Exemple : Soit une route se séparant en deux voies A et B. On suppose que le nombre de véhicules arrivant à l'embranchement pendant une durée T donnée suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que chaque véhicule emprunte la voie A avec une probabilité p.
Alors le nombre de véhicules allant en A durant T suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$

Bibliographie :

[OUV1] Ouvrard "Probabilités 1"

[OUV2] "Probabilités 2"

[ZQ] Zuily-Queffelec "Analyse pour l'agrégation"

[BAR] Barbe-Ledoux "Probabilité"