253 . UTILISATION DE LA NOTION DE CONVEXITÉ EN ANALYSE.

I _ LES PREMIERS FRUITS DE LA CONVEXITÉ.

1. Ensembles et fonctions convexes.

Définition 1. Un sous-ensemble A d'un espace affine $\mathcal{A}$ est dit convexe si $\forall x, y \in A$, on a $[x,y] \subset S$.

Exemples 2. Les sous-espaces affines sont convexes.
Les boules de norme sont convexes.
Une intersection de convexes est convexe.

Théorème 3. [Helly] Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension d et $(C_i)_{i \in I}$ une famille d'au moins $d+1$ convexes telle que (i) $\bigcap_J C_j \neq \emptyset$ $\forall J, |J| = d+1$

(ii) I est fini ou $\forall i$, C_i compact

Alors $\bigcap_I C_i \neq \emptyset$. Confère figure 1.

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si son épigraphe est convexe.

Théorème 5. f est convexe si, et seulement si,

$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

2. Inégalités de convexité.

Théorème 6. [Inégalité arithmético-géométrique]
Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(a_1 \cdots a_m)^{1/m} \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_m}{m} \right).$$

avec égalité si, et seulement si, les a_i sont égaux.

Théorème 7. [Inégalité de Hölder] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Pour $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

Théorème 8. [Inégalité de Minkowski] $p \geq 1$.

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

En particulier $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 9. [Inégalité de Brunn-Minkowski].
μ mesure de Lebesgue. Soit A, B convexes compacts de $\mathcal{A}$ de dim. d.
on a

$$\mu(A+B)^{1/d} \geq \mu(A)^{1/d} + \mu(B)^{1/d}$$

Application 10. [Inégalité isopérimétrique].
Soit A un convexe compact. alors

$$\ell(A)^2 \geq 4\pi \lambda(A).$$

II. CONVEXITÉ ET TOPOLOGIE.

1. Projection sur un convexe fermé

Théorème 11. Soit A un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H, alors

$$\forall x \in H \ \exists! P_A x, \quad |x - P_A x| = \min_{y \in A} |x - y|$$

Confère figure 2. De plus, $P_A x$ est caractérisé par

$$P_A x \in K \text{ et } \langle x - P_A x, y - P_A x \rangle \leq 0 \ \forall y \in H$$

Application 12. [Théorème de représentation de Riesz]

$$\forall \varphi \in H' \ \exists! x \in H, \quad \varphi(y) = \langle x, y \rangle \ \forall y \in H$$

Théorème 13. [Lax Milgram]

Soit $a(x,y)$ une forme bilinéaire, continue et coercive, alors

$$\forall \varphi \in H' \quad \exists x \in H, \quad a(x,y) = \langle \varphi, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

De plus, si a est symétrique, x est caractérisé par :

$$x \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} a(x,x) - \langle \varphi, x \rangle = \min_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(y,y) - \langle \varphi, y \rangle \right\}$$

Application 14. Résolution d'équations aux dérivées partielles.

Théorème 15. [Théorème de Motzkin]. Soit A fermé de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi_x : A \ni y \longmapsto \|y - x\|$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors

$$(A \text{ convexe}) \Leftrightarrow \left(\forall x \in A^c, \ \varphi_x \text{ atteint son min. en un unique point} \right)$$

2. Séparation des convexes.

Définition 16. Soient $A, B \subset E$ et H hyperplan d'équation $\{f = \alpha\}$. On dit que H sépare A et B au sens large si

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq \alpha \quad \text{et} \quad \forall x \in B \quad f(x) \geq \alpha.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in A \quad f(x) \leq \alpha - \varepsilon.$$
$$\forall x \in B \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon.$$

Définition 17. Soit A convexe ouvert de E, $0 \in A$.

On pose $\forall x \in E \quad \rho(x) = \inf\{\alpha > 0, \ x \in \alpha A\}$ la jauge de A.

Théorème 18. ρ est positivement homogène et sous-additive et vérifie $\exists M, \ 0 \leq \rho(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$.

et $A = \{x \in E, \ \rho(x) < 1\}$.

Théorème 19. [Hahn-Banach géométrique] [DEV 1]

Soient $A, B \subset E$ deux convexes non vides disjoints.

(i) Si A ouvert alors il existe H hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

(ii) Si A fermé et B compact, alors il existe H hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Théorème 20. [Krein-Milman]

Soit $A \subset E$ un convexe compact, alors A est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Application 21. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ convexe continue, alors f atteint son maximum en au moins un point extrémal de A.

figure 3.

III. THÉORÈMES DE POINTS FIXES.

Théorème 22. [Brouwer] [DEV 2]

Soit A un convexe compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : A \to A$ continue. Alors f a un point fixe dans A.

Théorème 23. [Schauder]

Soit A un convexe compact de E evn et f continue de A dans A. Alors f possède un point fixe dans A.

Théorème 24 [Markov-Kakutani]

Soit E un espace vectoriel normé, soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications affines continues de E dans E commutant deux à deux. Soit $A \subset E$ un convexe compact $\neq \emptyset$ stable par tout $T \in \mathcal{F}$

Alors $\exists x \in A, \quad T(x) = x \quad \forall T \in \mathcal{F}$.

Application 25. Existence d'une mesure de Haar sur un groupe topologique compact commutatif.

Application 26. Les sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à un sous groupe du groupe orthogonal.

Théorème 27. [Browder] [DEV 3]

Soit A convexe fermé-borné d'un espace de Hilbert H

Soit $f : A \to A$ 1-lipschitzienne. Alors f a un point fixe $\in A$

IV - ANALYSE CONVEXE.

1 - Régularité des fonctions convexes.

Théorème 28 - Si f est convexe sur I intervalle ouvert, elle admet en tout point de I une dérivée à gauche et à droite.

Corollaire 29 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue sur l'intérieur de I.

Théorème 30 - Soit A ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue sur U.

Théorème 31. A convexe ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ convexe. Si f admet des dérivées partielles en x, alors elle est différentiable en x.

Théorème 32. A ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $x, y \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ convexe différentiable sur A, on a

$$f(y) - f(x) \geq (\vec{\nabla} f(x) | x - y).$$

2 - Extremums et fonctions convexes.

Théorème 33. Soit A ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ convexe différentiable

Alors (i) si f admet un maximum local, elle est localement constante

(ii) f admet un minimum global en $x \in A$ ssi $\vec{\nabla} f(x) = 0$

Théorème 34. [méthode de la trichotomie].

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe. Alors on peut approcher son minimum par trichotomie et la convergence est géométrique. Confère figure 4.

Définition 35. Soit A ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ on dit que f est elliptique s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$Hf(x).(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 36. Si f est elliptique, la méthode de gradient à pas optimal converge vers le minimum de f. De plus, deux directions consécutives sont orthogonales

+ inégalité de Jensen

ANNEXES.

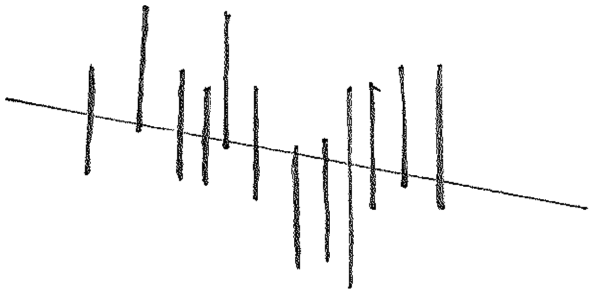

figure 1. Application de Helly. Une famille finie de segments parallèles disjoints ayant 3 à 3 une sécante commune.

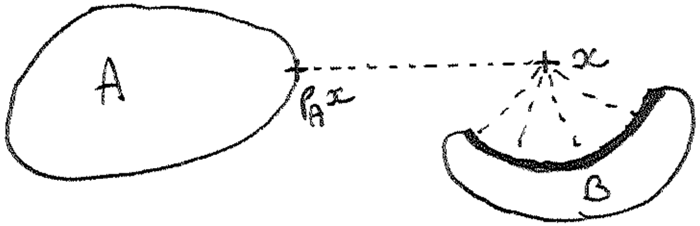

figure 2. Projeté sur un convexe fermé A et contre exemple dans le cas de B non convexe.

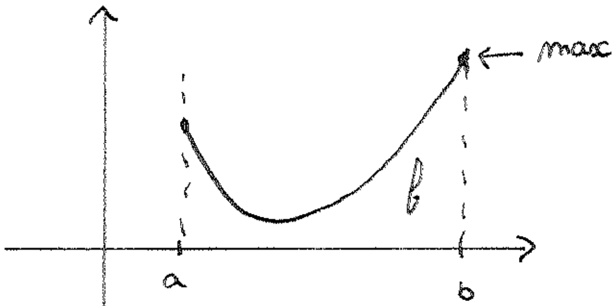

figure 3. Illustration de l'application 21.

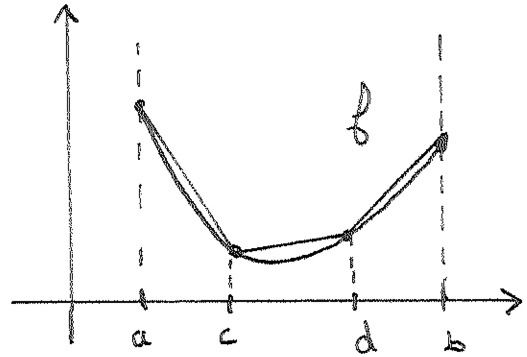

figure 4. Méthode de la trichotomie, le minimum de f est soit dans [a,d] soit dans [c,b].

BIBLIOGRAPHIE.

[BERGER] Marcel Berger. Géométrie 1.

[BREZIS] Haïm Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applicat–

[CIARLET] Philippe G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique ...

[CLF2] Chambert-Loir Fermigier. Analyse 2.

[CLF3] Chambert-Loir Fermigier. Analyse 3.

[TESTARD] Frédéric Testard. Analyse mathématique.